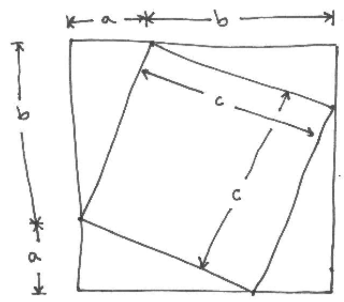
TATA79/TEN2 **Omdugga 2, 2015-01-04**

Inledande matematisk analys

1. Med hjälp av en bild bevisa Pythagoras sats som gäller för rätvinkliga trianglar.

Solution: Betrakta en fyrkant med sidorna av längden $a + b$. Markera på topp sidan en punkt som har längden a från vänsterkanten. Gör det samma på de tre andra sidorna och rita den fyrkanten som har de fyra punkterna som hörnpunkter. Se figur nedan.



Mittemellan de två fyrkanterna finns fyra rätvinkliga trianglar som alla har sidor av längderna a, b och c.

Vi kan räkna ut arean av den störa fyrkanten på två olika sätt. Det första är med den vanlig formeln för arean av en fyrkant med sidorna av längden $a+b$. Då är arean $(a+b)^2$. Det andra sättet är att addera arean av den mindre fyrkanten c^2 och arean av de fyra trianglarna $ab/2$. Det vill säga arean är $c^2 + 4(ab/2)$. Eftersom båda uttrycken för arean måste vara lika får vi att

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = c^2 + 4(ab/2) = c^2 + 2ab.$$

Det medför att $a^2 + b^2 = c^2$.

2.

(a) Med hjälp av en bild definiera trigonometriska funktioner cosinus och sinus. Skissa graphen av $\cos\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

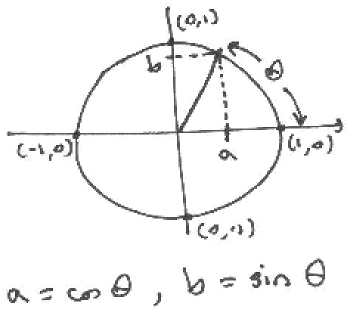
(b) Med hjälp av en bild bevisa att

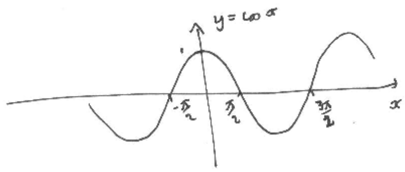
$$\sin(\theta) \leq \theta$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

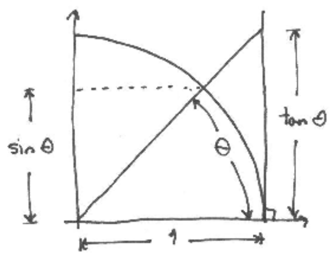
Solution:

(a) Titta:





(b) Titta:



I bilden längden $\sin\theta$ ser ut kortare än längden θ. För ett bättre bevis, använd area.

3.

(a) Definiera funktionen tangens. Glöm inte att ge definitionsmängden.

(b) Använd

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \quad \text{och}$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

för att visa

$$\tan(\theta+\theta) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

för de flesta θ och φ. För vilka θ och φ är likheten odefinierad?

Solution:

Alla fick full poäng på uppgift 3 på grund av tryckfel i uppgiften.

(a) Vi definierar $\tan\colon D \to \mathbf{R}$ enligt $\tan\theta = (\cos\theta)/(\sin\theta)$ då $D = \{\theta \mid \theta \neq \pi/2 + k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}\}$.

(b) Vi räknar ut

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)} = \frac{\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi} = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

om vi antar att varken θ, φ eller $\theta+\varphi$ är lika med $\pi/2 + k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$. Annars är minst ett led odefinierat.

4.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Använd räknareglar för den exponentialfunktionen för att visa $a^{x+y} = a^x a^y$ för $a > 0$ och $x, y \in \mathbf{R}$.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar ut att

$$a^x a^y = \exp(x\ln(a))\exp(y\ln(a)) \underset{\substack{\uparrow \\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}}{=} \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) = \exp((x+y)\ln(a)) = a^{x+y}.$$

---

5. Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|. \end{cases}$$

(a) Definiera funktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,\infty)$.

(b) Visa att $\exp(x) \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

Solution:

(a) Funktionen exp definieras enligt formeln $\exp(x) := \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$.

(b) Enligt Bernoullis olikhet har vi att

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{nx}{n} = 1 + x$$

för $n > |x|$ och eftersom $\exp(x)$ är en övre begränsning av vänsterledet är

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

6.

(a) Definiera funktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$.

(b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right) - \ln(x+3) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om $(\diamondsuit)$ så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

Solution:

(a) Funktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ definieras som inversen till exponentialfunktionen.

(b) Uttrycket $\ln(x+3)$ är definierat för $x > -3$. Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+3)}{x+7}\right) \qquad (1)$$

och kvotet byter tecken (med en linjär faktor) då $x = -7$, -3 och 1. För stört x är alla faktorerna positiva, därför är

$$\frac{(x+3)(x-4)}{x+1} > 0 \quad \text{om } x > 1 \text{ eller } -7 < x < -3. \qquad (2)$$

För att $(\diamondsuit)$ vara definierat kravs att villkoren i (1) och (2) är uppfyllda. Därför är $(\diamondsuit)$ definierat för $x > 1$.

Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right) - \ln(x+3) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+3)}{x+7}\right) - \ln(x+3) = \ln\left(\frac{(x-1)}{(x+7)}\right)$$

och kvotet

$$\frac{(x-1)}{(x+7)}$$

byter tecken då $x = -7$ och 1. Därför är kvotet positivt om $x < -7$ eller $x > 1$, och

$$\ln\left(\frac{(x+4)^2(x-2)}{x+7}\right)$$

är definierat för $x < -7$ och $x > 1$.

7.

(a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa Eulers identitet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Solution:

(a) $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Eftersom $\cos\pi = -1$ och $\sin\pi = 0$ så är

$$e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1 = -1 + i0 + 1 = 0.$$
