Inledande matematisk analys

1.

(a) Betrakta påståendet

"Om man körde från Linköping till Stockholm
i mindre än 1 timme 40 minuter har man brutit
mot hastighetsbegränsningen." (♣)

Ge kontrapositionen av (♣). Du måste inte motivera ditt svar.

(b) Betrakta påståendet

$$"x \geq 6" \qquad (♠)$$

Vilka eller vilken av de följande påståenden är ett tillräckligt villkor för påståendet (♠). Du måste inte motivera ditt svar.

(i) "$x \geq 8$"
(ii) "$x \geq 3$"
(iii) "$(x + 8)(x - 9) = 0$"
(iv) "$(x - 8)(x - 9) = 0$"

Solution:

(a) Kontrapositionen av (♣) är "Om man bröt inte mot hastighetsbegränsningen tog man längre än 1 timmer 40 minuter att köra från Linköping till Stockholm".

(b) (i) och (iv) är tillräckliga villkor för (♠)

---

2. Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - k) = n^2(n + 1)$$

för alla positiva heltal n.

Solution:

Vi ger ett induktionsbevis.

Om $n = 0$ är vänsterledet $\sum_{k=1}^{1}(3k^2 + k) = 3 \times 1^2 - 1 = 2$ och högerledet är $1^2(1 + 1) = 2$ så likheten stämmer då.

Nu antar vi att likheten stämmer för $n = m$ och vi betraktar likheten då $n = m + 1$. Vi får att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(3k^2 - k) &= \sum_{k=1}^{m}(3k^2 - k) + (3(m + 1)^2 - (m + 1)) = m^2(m + 1) + (3(m + 1)^2 - (m + 1)) \\ &= (m + 1)(m^2 + 3(m + 1) - 1) = (m + 1)(m + 1)(m + 2) = (m + 1)^2((m + 1) + 1),\end{aligned}$$

så vi drar slutsatsen att likheten stämmer om $n = m + 1$. Därför enligt induktionspricipen gäller likheten för alla $n \in \mathbf{N}$.

3.

(a) Ge definitionen att en icketom mängd A är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad där

$$a_n = \frac{(n-1)^2 - 9}{2 + (n-1)^2}$$

för alla positiva heltal n.

Solution:

(a) Man säger att mängden A är *uppåt begränsad* om det finns $C \in \mathbf{R}$ så att

$$a \leq C \quad \text{för alla } a \in A.$$

(b) Vi vill hitta ett $C \in \mathbf{R}$ så att $a_n \leq C$ för alla $n \geq 1$. Vi räknar

$$a_n = \frac{(n-1)^2 - 9}{2 + (n-1)^2} = \frac{2 + (n-1)^2 - 11}{2 + (n-1)^2} = 1 - \frac{11}{2 + (n-1)^2} \leq 1,$$

så $a_n \leq 1$ för alla positiva heltal n. Dessutom är $a_1 = -9/2 \leq 1$. Därför ser vi att $a_n \leq 1$ för alla positiva heltal n, och därmed är $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad.

4.

(a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *växande* och *strängt växande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta två funktioner $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formlerna

$$f(x) = x^3 \quad \text{och} \quad g(x) = (x-4)((x-4)^2 + 2)$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

Under kursens gång har vi lärt oss att f är en strängt växande funktion. Med hjälp av detta visa att g är en strängt växande funktion.

Solution:

(a) En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$ för alla $x, y \in I$. En funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ kallas för *strängt växande* om $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$ för alla $x, y \in I$.

(b) Vi kan skriva om $g(x) = (x-4)((x-4)^2 + 2) = (x-4)^3 + 2(x-4)$. Vi vet att

$$x < y \implies x - 4 < y - 4 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ strängt växande}}}{\implies} (x-4)^3 = f(x-4) < f(y-4) = (y-4)^3$$

Därmed får vi att

$$x < y \implies \left\{ \begin{array}{l} x - 4 < y - 4 \text{ och} \\ (x-4)^3 < (y-4)^3 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} 2(x-4) < 2(y-4) \text{ och} \\ (x-4)^3 < (y-4)^3 \end{array} \right.$$

Men de två sista olikheterna får vi addera för att få $g(x) = (x-4)^3 + 2(x-4) < (y-4)^3 + 2(y-4) = g(y)$. Därför har vi visat $x < y \implies g(x) < g(y)$ så g är strängt växande.

5.

(a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den största undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 0 där

$$b_n = \frac{5n}{n^2 + 6}$$

för varje positivt heltal n.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) till varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.

(b) Först vill vi kolla att 0 är en undre begränsning av $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Eftersom $5n \geq 0$ och $n^2 + 6 > 0$ så är

$$b_n = \frac{5n}{n^2 + 6} \geq 0$$

och därmed är 0 en undre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nu betraktar vi $\varepsilon > 0$ och räknar

$$\frac{5n}{n^2 + 6} \leq \frac{5n}{n^2} \leq \frac{5}{n}$$

så om vi välja $n > 5/\varepsilon$ då har vi hittat n så att $\frac{5n}{n^2+6} \leq \frac{5}{n} < \varepsilon = 0 + \varepsilon$.

Då har vi vissat att 0 är den minsta undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.