Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge negationen av påståendet:

”Alla hundar kan skälla.”

(b) Visa att om

- n_1 delat med 7 har rest 2, och
- n_2 delat med 7 har rest 2,

då har $n_1 n_2$ delat med 7 rest 4.

Solution:

(a) ”Det finns minst en hund som kan inte skälla.”

(b) Eftersom både n_1 och n_2 delat med 7 har rest 2 så är

$$n_1 = 7m_1 + 2$$

för något heltal m_1 och

$$n_2 = 7m_2 + 2$$

för något heltal m_2. Därför är

$$n_1 n_2 = (7m_1+2)(7m_2+2) = 49m_1m_2+14(m_1+m_2)+4 = 7(7m_1m_2+2(m_1+m_2))+4$$

så $n_1 n_2$ delat med 7 rest 4.

---

2. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

för alla positiva heltal n.

Solution:

Vi bevisar

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} \qquad (*)_n$$

med hjälp av induktion.

Först kollar vi att $(*)_1$ är sann:

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2)(k+3) = 1(1+1)(1+2)(1+3) = 4!$$

och

$$\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)}{5} = \frac{5!}{5} = 4!,$$

så $(*)_1$ är sann.

Nu antar vi att $(*)_\ell$ är sann för något ℓ och betraktar vänsterledet i $(*)_{\ell+1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell+1} k(k+1)(k+2)(k+3) &= \sum_{k=1}^{\ell} k(k+1)(k+2)(k+3) + (\ell+1)((\ell+1)+1)((\ell+1)+2)((\ell+1)+3) \\
&= \frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)}{5} + (\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4) \\
&= (\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)\left(\frac{\ell}{5}+1\right) \\
&= \frac{(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)(\ell+4)(\ell+5)}{5},
\end{aligned}$$

som är högerledet i $(*)_{\ell+1}$, så vi har visat $(*)_\ell \implies (*)_{\ell+1}$.

Enligt induktionsprincipen har vi bevisat $(*)_n$ för alla positiva heltal n.

3.

Hitta alla möjliga par av ickenegativa reella tal a och b så att $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Solution:

Om vi antar att $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (och $a \geq 0$ och $b \geq 0$) är

$$a + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$

så

$$0 = 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

och det medför att antingen $a = 0$ eller $b = 0$. Därför

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \implies \text{antingen } a = 0 \text{ eller } b = 0.$$

I den motsatta riktningen:

$$a = 0 \implies \sqrt{a+b} = \sqrt{0+b} = \sqrt{b} = 0 + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b};$$

Och på samma sätt

$$b = 0 \implies \sqrt{a+b} = \sqrt{a+0} = \sqrt{a} = \sqrt{b} + 0 = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Därför har vi visat att

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff \text{antingen } a = 0 \text{ eller } b = 0.$$

Så alla möjliga par av reella tal a och b så att $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ är:

$a = 0$ och ett godtyckligt $b \in \mathbf{R}$; eller
ett godtyckligt $a \in \mathbf{R}$ och $b = 0$.

4.

(a) Bevisa att
$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$$
för alla $\theta, \phi \in \mathbf{R}$.

(b) Skriv om $\sin(\theta)\cos(\phi)$ på ett liknande sätt, det vill säga skriv om det till ett uttryck som innehåller bara trigonometriska funktioner av $\theta+\phi$ eller $\theta-\phi$.

Solution:

(a) Vi räknar
$$\begin{aligned}&\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)\\&= (\cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi)) + (\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi))\\&= 2\cos(\theta)\cos(\phi).\end{aligned}$$

(b) Vi får också räkna
$$\begin{aligned}&\sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi)\\&= (\sin(\theta)\cos(\phi)+\cos(\theta)\sin(\phi)) + (\sin(\theta)\cos(\phi)-\cos(\theta)\sin(\phi))\\&= 2\sin(\theta)\cos(\phi).\end{aligned}$$
så
$$\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{\sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi)}{2}$$
för alla $\theta, \phi \in \mathbf{R}$.

5.

Kom ihåg att
$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \le |x|, \\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$
för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att
$$\exp_n(x) \le \exp(x) \le \frac{1}{\exp_n(-x)}$$
om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le e \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$
för alla $n \ge 3$.

Solution:

(a) $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $e = \exp(1)$.

(b) Eftersom $\exp(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$ är $\exp(x)$ en över begränsning av $(\exp_n(x))_n$, så är

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \tag{1}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{N}$.

Eftersom (1) gäller för alla $x \in \mathbf{R}$ kan vi sätta $-x$ in istället för x och får

$$\exp_n(-x) \leq \exp(-x) \implies \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)} \tag{2}$$

för $n > |x|$, eftersom i så fall är $\exp_n(x) > 0$.

Därför ger (1) och (2) att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}. \tag{3}$$

(c) Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i första olikhet i (3) får vi att

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp_n(1) \leq \exp(1) = e$$

för $n \geq 2$. Om vi sätter $x = 1$ och definitionen av $\exp_n$ in i sista olikhet i (3) får vi att

$$e = \exp(1) \leq \frac{1}{\exp_n(-1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

för $n \geq 2$, så

$$e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$. Allihop då är

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för $n \geq 3$.

6.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Visa att $a^{xy} = (a^x)^y$.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x \ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Vi räknar $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(y \ln(\exp(x \ln(a)))) = \exp(y(x \ln(a))) = \exp((yx)\ln(a)) = a^{xy}$.

7.

Kom ihåg att absolutbeloppet av ett reelt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(a) Definiera absolutbeloppet $|z|$ av ett komplext tal z och visa att den stämmer överens med definitionen för reella tal i fallet imaginärdelen av z är noll.

(b) Visa att $|zw| = |z||w|$ for alla komplexa tal z och w.

Solution:

(a) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ där $z = x + iy$ för reella tal x och y. Om imaginärdelen av z är noll är $z = x$ och $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$. I fallet $x \geq 0$ är $\sqrt{x^2} = x$ och om $x < 0$ är $\sqrt{x^2} = -x$, så det stämmer överens med definitionen för reella tal.

(b) Anta att $z = x + iy$ och $w = u + iv$ för $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Då är

$$zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

så

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 \\ &= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

som medför att $|zw| = |z||w|$ eftersom absolutbeloppet av ett tal är aldrig negativt.