Inledande matematisk analys

1. Visa att lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen $x^2 = 3$ är irrationella.

Solution: Först vill vi bevisa en hjälpsats:

Om man vet att ett heltal i kvadrat c^2 är delbart med 3 så måste c också vara delbart med 3. (1)

Varje heltal c antingen är delbart med 3 (och kan skrivas som $c = 3n$ för något heltal n) eller är inte delbart med 3 (och kan skrivas antingen som $c = 3n + 1$ eller $c = 3n+2$). Om $c = 3n+1$ så är $c^2 = (3n+1)^2 = 3(3n^2+2n)+1$ så c^2 är inte delbart med 3. Om $c = 3n+2$ så är $c^2 = (3n+2)^2 = 3(3n^2+6n+1)+1$ så c^2 är inte delbart med 3. Därför kan vi dra slutsatsen att om c är inte delbart med 3 så är c^2 inte delbart med 3. Det är kontrapositionen av (1), så (1) är bevisat.

Nu antar vi att c är rationellt, det vill säga att $c = n/m$ för $n, m \in \mathbf{Z}$. Vi kan också anta att n och m inte har någon gemensam delare.

Därav får vi att $3 = c^2 = n^2/m^2$ som medför att $3m^2 = n^2$. Så n^2 är delbart med 3 och enligt (1) är n delbart med 3 och kan då skrivas som $n = 3\ell$ för något $\ell \in \mathbf{Z}$. Nu kan vi sätta $n = 3\ell$ i $3m^2 = n^2$ och få $3m^2 = 9\ell^2$ som medför att $m^2 = 3\ell^2$. Det innebär att m^2 är delbart med 3 och därför enligt (1) är m också delbart med 3.

Vi har bevisat att både n och m är delbara med 3 och det innebär att 3 är en gemensam delare till n och m. Det är en motsägelse till att n och m inte har någon gemensam delare, därför är c inte rationellt.

2.

(a) Med hjälp av en bild definiera trigonometriska funktioner cosinus och sinus. Skissa graphen av $\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

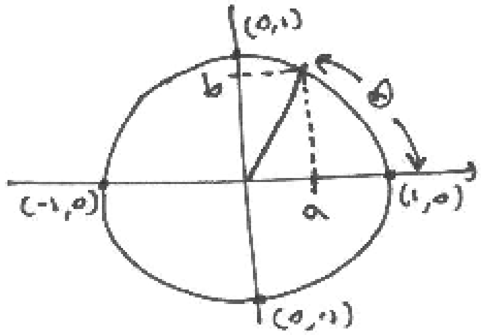
(b) Med hjälp av en bild bevisa att

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

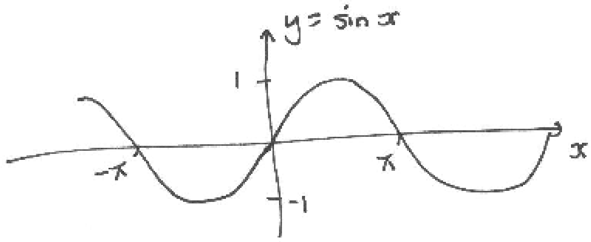
för θ och φ som uppfyller $\theta \geq 0$, $\varphi \geq 0$ och $\theta + \varphi \leq \pi/2$.

Solution:

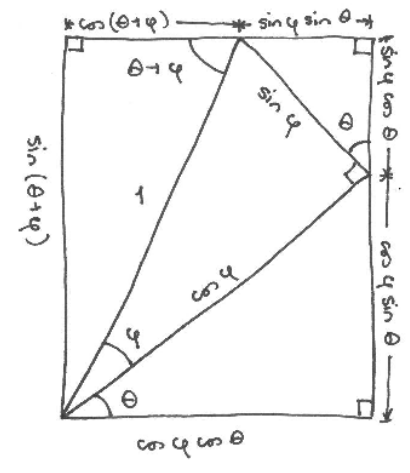
(a) Titta:



$a = \cos\theta \ , \ b = \sin\theta$



(b) Titta:



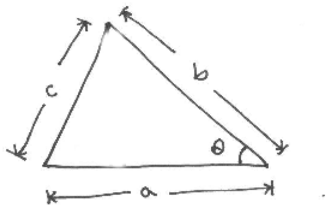
Formeln bevisas genom att observera att längden av rektangels ovansidan i figuren är lika med nedansidans längd.

---

3. Kom ihåg cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

där a, b, c och θ ges i figuren nedan.



Använder cosinussatsen eller en annan metod för att visa

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Solution: Betrakta triangeln i figuren med $a = b = 2$ och $\theta = \pi/4$. Cosinussatsen säger då att $c^2 = 4 + 4 - 8\cos(\pi/4)$. Vi vet från den rätvinkliga triangeln (nedan) med sidorna av längderna 1, 1 och $\sqrt{2}$ att $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, så $c^2 = 8 - 8/\sqrt{2}$ och $c = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Om vi delar triangeln i två som figuren nedan

ser vi att mellersta linjen har längd $\sqrt{4 - (8-4\sqrt{2})/4} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ och därför är

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

---

4. Bevisa Bernoullis olikheten: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{N}$ får man att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Solution: Vi ger ett induktionsbevis av

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{2}$$

Först kollar vi vad som händer då $n=1$: $(1+x)^n = (1+x) \geq (1+x) = 1+nx$ så (2) stämmer om $n=1$. Sen antar vi att (2) stämmer för $n=m$ där $m \in \mathbf{N}$ och betraktar fallet $n=m+1$:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) \geq (1+mx)(1+x) = 1+mx+x+mx^2 \geq 1+(m+1)x$$

så (2) stämmer för $n=m+1$ och (2) är bevisad.

5. Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|. \end{cases}$$

(a) Definiera funktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,\infty)$.

(b) Visa att $\exp(x) \geq 1+x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

Solution:

(a) Funktionen exp definieras enligt formeln $\exp(x) := \sup_{n\in\mathbf{N}} \exp_n(x)$.

(b) Enligt Bernoullis olikhet har vi att

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+\frac{nx}{n} = 1+x$$

för $n > |x|$ och eftersom exp är en övre begränsning av vänsterledet är

$$\exp(x) \geq 1+x.$$

6.

(a) Definiera funktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$.

(b) Kom ihåg att $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Visa att $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$ för alla $a,b \in (0,\infty)$.

(c) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2-x-12}{x+1}\right) + \ln(x+3) \tag{$\diamondsuit$}$$

definierat? Skriva om ($\diamondsuit$) så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

Solution:

(a) Funktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ definieras som inversen till exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,\infty)$.

(b) Eftersom $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,\infty)$ är bijektiv finns det, för varje positiva a och b, $x, y \in \mathbf{R}$ så att $a = \exp(x)$ och $b = \exp(y)$ och därför är $\ln(a) = x$ och $\ln(b) = y$. Vi kan skriva $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ om som

$$\exp(\ln(a) + \ln(b)) = ab$$

så

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(\exp(\ln(a) + \ln(b))) = \ln(ab)$$

(c) Uttrycket $\ln(x+3)$ är definierat för $x > -3$. Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2 - x - 12}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{(x+3)(x-4)}{x+1}\right)$$

och kvotet byter tecken (med en linjär faktor) då $x = -3$, -1 och 4. För stört x är alla faktorerna positiva, därför är

$$\frac{(x+3)(x-4)}{x+1} > 0 \quad \text{om } x > 4 \text{ eller } -3 < x < -1.$$

Därför är $(\diamondsuit)$ definierat för $x > 4$ och $-3 < x < -1$.

Vi kan skriva om

$$\ln\left(\frac{x^2 - x - 12}{x+1}\right) + \ln(x+3) = \ln\left(\frac{(x+3)(x-4)}{x+1}\right) + \ln(x+3) = \ln\left(\frac{(x+3)^2(x-4)}{x+1}\right)$$

och kvotet

$$\frac{(x+3)^2(x-4)}{x+1}$$

byter tecken då $x = -1$ och 4 men om $x = -3$ når det noll utan att korsa x-axeln. Därför är kvotet positivt om $4 < x$, $-3 < x < -1$ eller $x < -3$ och

$$\ln\left(\frac{(x+3)^2(x-4)}{x+1}\right)$$

är definierat för $4 < x$, $-3 < x < -1$ och $x < -3$.

---

7. Lös ekvationen $z^2 - 6z - 3 - 4i = 0$ för $z \in \mathbf{C}$.

Solution: Ekvationen kan skrivas som $(z-3)^2 = 12+4i$ så vi sätter $z-3 = x+iy$ och räknar ut

$$x^2 - y^2 + 2ixy = (z-3)^2 = 12 + 4i$$

som är ekvivalent med ekvationerna

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 12 \quad \text{och} \\ 2xy &= 4 \end{aligned}$$

och vi också har att $x^2 + y^2 = |x+iy|^2 = |(x+iy)^2| = |12+4i| = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$. Därför är

$$2x^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) = 4\sqrt{10} + 12$$

så $x = \pm\sqrt{2\sqrt{10}+6}$ och

$$2y^2 = (x^2+y^2) - (x^2-y^2) = 4\sqrt{10} - 12$$

så $y = \pm\sqrt{2\sqrt{10}-6}$. Men ekvationen $2xy = 4$ säger att antingen både x eller y är positiva eller både x och y är negativa, därför är

$$x + iy = \pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}+6} + i\sqrt{2\sqrt{10}-6}\right)$$

så möjliga lösningar är z lika med

$$\begin{gathered}\left(3+\sqrt{2\sqrt{10}+6}\right) + i\sqrt{2\sqrt{10}-6} \quad \text{eller} \\ \left(3-\sqrt{2\sqrt{10}+6}\right) - i\sqrt{2\sqrt{10}-6}\end{gathered}$$
