Inledande matematisk analys (TATA79)

Höstterminen 2017

Modul F: Den naturliga exponentialfunktionen och sin invers

Förberedelse

F.1 Läs avsnitt 4.1 av *Ge svar på tal*. Bevisen av sats 4.5 och 4.6 är lite svårlästa men det dugger att senarelägga läsning av bevisen (fast inte satserna) till förberedelse för förläsning F.

Lektion F1

Grupparbete

F.2 I avsnitt 2.2.2 definierade vi en potens a^x där $x \in \mathbf{Z}$ och $a \neq 0$. I avsnitt 3.3.2 hittade vi ett sätt att utvidga begreppet a^x, minst i fallet $a > 0$, till rationella x som lyder potensregeln

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

I den här uppgiften utreder vi om det finns andra funktioner $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ som lyder samma regel, det vill säga

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{F.1}$$

för alla rationella x och y, samt likheten

$$f(1) = a \tag{F.2}$$

för givet $a > 0$. Man får bara bygga på (F.1) och (F.2) för att härleda era slutsatser.

(a) Utred om man kan skriva $f(2)$ som ett uttryck i a.

(b) Kan man skriva $f(2x)$ som ett uttryck i $f(x)$? Dra slutsatsen att $f(x) \geq 0$ för alla rationella x.

(c) Skriv $f(nx)$ som ett uttryck i $f(x)$ och n för godtyckliga positiva heltal n och rationella x. Vad säger din slutsats om $f(n)$?

(d) Bevisa att $f(x/m) = \sqrt[m]{f(x)}$ för positiva rationella x och positiva heltal m.

(e) Bevisa att $f(n/m) = a^{n/m}$ med $n, m \in \mathbf{Z}_+$. (Det vill säga $f(x) = a^x$ för positiva rationella x.)

(f) Räkna ut $f(0)$.

(g) Bevisa $f(x) = a^x$ för alla negativa rationella x.

(h) Dra slutsatsen att det finns högst en funktion $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ som uppfyller (F.1) och (F.2).

(i) Extra: Diskutera om det kan vara möjligt att dra samma slutsats om man istället betraktar $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som uppfyller (F.1) och (F.2).

Självstudieuppgifter

F.3 Anta att $\exp(x) = \sqrt{2}$ och $\exp(y) = \sqrt{8}$. Räkna ut (a) $\exp(x + y)$, (b) $\exp(2x)$ och (c) $\exp(2x + 2y)$.

F.4 Om $x \in \mathbf{R}$ uppfyller $\exp(2x + 3) = \exp(2x) + \exp(3)$ räkna ut möjliga värder för $\exp(x)$.

F.5 Kom ihåg att $e := \exp(1)$. Använder definitionen (4.3) och sats 4.3 för att visa

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och i synnerhet $9/4 \leq e \leq 4$.

F.6 I sats 4.4, del 5 visade vi att exponentialfunktionen är växande. Använder del 2 av sats 4.4 och sats 4.6 för att visa exponentialfunktionen är strängt växande.

Förberedelse för föreläsning F: Den naturliga exponentialfunktionen och den naturliga logaritmfunktionen

F.7 Läs avsnitt 4.2 av *Ge svar på tal*.

Lektion F2

Grupparbete

F.8 I den här uppgiften utreder vi hur snabbt exponentialfunktionen samt den naturliga logaritmfunktionen växer jämfört med polynom.

(a) Kom ihåg att exponentialfunktionen är ett supremum av polynom (se definitionen (4.3)). Bevisa att

$$\frac{x^n}{n^n} \leq \exp(x) \tag{F.3}$$

för varje $x \geq 0$ och $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Utifrån (F.3) precisera vad det kan mena att säga exonentialfunktionen $\exp(x)$ växer snabbare än ett godtyckligt polynom för tillräckligt stort x.

(c) Skriv om (F.3) som ett påstående som handlar om den naturliga logaritmfunktionen.

(d) Utifrån svaret till (c) dra slutsatsen att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $C > 0$ så att

$$\ln(a) \leq Ca^{\varepsilon}$$

för alla $a > 1$.

(e) Utifrån svaret till (d) precisera vad det kan mena att säga den naturliga logaritmfunktionen $\ln(a)$ växer mer långsamt än en godtycklig positiv potens för tillräckligt stort a.

Självstudieuppgifter

F.9 $*2.7$, 2.8, $*2.9$, 2.11 och $*2.14$ från *Problem för envar.*

F.10 Förenkla följande uttryck:

(a) $\exp(\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}))$ för $x > 1$; och

(b) $2\ln(\exp(\sqrt{x+1})\exp(\sqrt{x-1}))$ för $x \in \mathbf{R}$.

F.11 $*2.28$, $*2.35$ och 2.36(a) från *Problem för envar.*

Inlämningsuppgifter

F.12 Gör inlämningsuppgifter F och lämna de in till din handledare eller i gruppens fack som ligger i korridoren 2A, B-huset, mellan ingångar 21 och 23. **Du får lämna in de senast den 1:e december 2017** och får återkoppling inom två dagar (kolla facket om du har inget handledningstillfälle). Inlämning av eventuell komplettering samt hämtning av återkoppling skers på samma sätt. **Komplettering får lämnas in senast den 11:e december 2017.**