

**Instruktioner:** Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hjälpmedel tillåtna. Lycka till!

- (1) (a) Betrakta påståendet

”Om man körde från Linköping till Stockholm i mindre än 1 timme och 40 minuter har man brutit mot hastighetsbegränsningen.” (♣)

Ge kontrapositionen av (♣). Du måste inte motivera ditt svar.

- (b) Betrakta påståendet

” $x \geq 6$ ” (♠)

Vilka eller vilken av de följande påståenden är ett tillräckligt villkor för påståendet (♠). Du måste inte motivera ditt svar.

- (i) ” $x \geq 8$ ”
- (ii) ” $x \geq 3$ ”
- (iii) ” $(x + 8)(x - 9) = 0$ ”
- (iv) ” $(x - 8)(x - 9) = 0$ ”

- (2) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - k) = n^2(n + 1)$$

för alla positiva heltal  $n$ .

- (3) (a) Ge definitionen att en icke-tom mängd  $A$  är uppåt begränsad.

- (b) Bevisa att följderna  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är uppåt begränsad där

$$a_n = \frac{(n-1)^2 - 9}{2 + (n-1)^2}$$

för alla positiva heltal  $n$ .

- (4) (a) Låt  $I$  vara ett intervall. Definiera begreppen *växande* och *strängt växande* som gäller för en funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ .
- (b) Betrakta två funktioner  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  och  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definierad enligt formlerna

$$f(x) = x^3 \quad \text{och} \quad g(x) = (x - 4)((x - 4)^2 + 2)$$

för alla  $x \in \mathbf{R}$ .

Under kursens gång har vi lärt oss att  $f$  är en strängt växande funktion. Med hjälp av detta visa att  $g$  är en strängt växande funktion.

- (5) (a) Definiera vad det betyder att säga  $\ell \in \mathbf{R}$  är en största undre begränsning till en icke-tom mängd  $A$ .
- (b) Bevisa att den största undre begränsningen till följderna  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  är 0 där

$$b_n = \frac{5n}{n^2 + 6}$$

för varje positivt heltal  $n$ .