Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Utred med bevis vilket eller vilka av följande påståenden är sana:

(a) Om $x \geq 7$ är $x(x-3) \geq 25$;

(b) Om $(x-2)(x-6) \leq 0$ är $x \leq 6$;

(c) $(x+6)(x-2) > 0$ om $x > -6$.

(2) Fibinacci talföljd $(F_n)_n$ definieras av villkoren

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & \text{för } n \geq 1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Räckna ut F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 och F_6. Vilket eller vilka är jämnt delbart med 8?

(b) Visa att $F_{n+6} = 5F_n + 8F_{n+1}$ för alla $n \geq 1$.

(c) Visa att vart sjätte tal från och med talet F_6 är jämnt delbart med 8.

(3) (a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b.

(b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$

(4) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R}\backslash\{4\} \to M$, där $M \subseteq \mathbf{R}$, som är definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{6x-8}{x-4}.$$

(a) Utred vad mängden M måste vara så att f är bijektiv.

(b) Ge ett uttryck för $f^{-1}(y)$ som gäller för alla $y \in M$, där M är ditt svar till (a).

(5) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

(6) (a) Definiera vad det betyder att säga $\ell \in \mathbf{R}$ är en största undre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den största undre begränsningen till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 2 där

$$b_n = \frac{2n^2 + 5n + 12}{n^2 + 6}$$

för varje positivt heltal n.

(7) Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definierad enligt formeln

$$f(z) = z^2$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.

(a) Visa att om $x > 0$, $y > 0$ och $z = x + iy$ — det vill säga, z ligger i den första kvadranten — då är $\Im(f(z)) > 0$.

(b) Betrakta $w \in \mathbf{C}$ som uppfyller olikheten $\Im(w) > 0$. Visa att ekvationen $w = f(z)$ har en lösning z som ligger i den första kvadranten.