Lektion 7

1 Enligt (3.11) är $a^{2/3}$ definierat om $a > 0$.

Tredje roten är definierad på icke-negativa tal och a^2 är icke-negativt för alla $a \in \mathbb{R}$. Därför är $\sqrt[3]{a^2}$ definierat för alla $a \in \mathbb{R}$.

En anledning att begränsa definitionen av rationella potenser $a^{m/n}$ till $a > 0$ är att annars skulle definitionen inte alltid vara konsekvent med den för heltals potenser (§ 2.2.2). Till exempel, trots att $1 = \frac{2}{2}$ är

$$(-1)^1 = -1$$

men

$$(-1)^{2/2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

2. $\boxed{2.1}$ (a) Vi vill kolla om g är bijektiv och om det är det bestämma ett uttryck i f^{-1} för g^{-1}.

Därför vill vi undersöka lösningar x till ekvationen

$$y = g(x) \quad \text{för ett godtyckligt } y \in \mathbb{R}.$$

$$y = g(x) \iff y = f(x) - 2 \iff \underset{(*)}{y + 2 = f(x)}$$

Men $(*)$ har en unik lösning x eftersom f är bijektiv:

$$x = f^{-1}(y+2)$$

Därför är inversen till g

$$g^{-1}(y) = f^{-1}(y+2)$$

(b) Här är svaret lite otydligt för vi vet inte vad definitions- och målmängden av g är

Men om vi definierar de på ett rimligt sätt kan vi visa att g är bijektiv och hittar en invers.

g är definierad för alla x så att $f(x) \neq -1$. Så definitionsmängden är $D_g = \mathbb{R} \setminus \{f^{-1}(-1)\}$

Vi kollar om och hur många lösningar $x \in \mathbb{R} \setminus \{f^{-1}(-1)\}$ finns till

$$y = g(x) \iff y = \frac{1}{1+f(x)}$$

Om $y \neq 0$ finns det en unik lösning:

$$y = \frac{1}{1+f(x)} \iff y(1+f(x)) = 1 \iff yf(x) = 1 - y$$

$$\iff f(x) = \frac{1-y}{y} \iff x = f^{-1}\left(\frac{1-y}{y}\right)$$

Så om vi tar $V_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ som g:s målmängd är

$g : \mathbb{R} \setminus \{f^{-1}(-1)\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv med invers

$$g^{-1}(y) = f^{-1}\left(\frac{1-y}{y}\right).$$

$\boxed{2.2}$ Vi vill betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad enligt

$$f(x) = x^3 + x.$$

Vi har att

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x^3 + x - y^3 - y \\ &= x^3 - y^3 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y) \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) \\ &= (x-y)\left((x + \tfrac{1}{2}y)^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + y^2 + 1\right) \\ &= (x-y)\left(\underbrace{(x - \tfrac{1}{2}y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\tfrac{3}{4}y^2}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{\geq 0}\right) \end{aligned}$$

så om $x < y$ är $f(x) - f(y) < 0$ så $f(x) < f(y)$ och f är strängt växande.

Att f är strängt växande medför att f är injektiv (ty om $f(x) = f(y)$ kan x inte vara skild från y) och $f(x)$ når varje reellt tal. Därför för varje $y \in \mathbb{R}$ finns det en unik lösning x till $y = f(x)$ och därför är f bijektiv (inverterbar)

(a) Eftersom $f(0) = 0$ måste $f^{-1}(0) = 0$

(b) Eftersom $f(1) = 1^3 + 1 = 2$ måste $f^{-1}(2) = 1$

(c) Eftersom $f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2$ måste $f^{-1}(-2) = -1$

(d) Eftersom $f(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$ måste $f^{-1}(10) = 2$.