Lektion 4

1 Betrakta ekvationen

$$|a+b| = |a| + |b| \qquad (*)$$

för $a, b \in \mathbb{R}$. Eftersom båda leden är icke-negativa vet vi att $(*)$ är ekvivalent med

$$|a+b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

[Ekvivalensen kan man bevisa precis som vi gjorde i lektion 1, uppgift 1, till exempel, men nu är vi vana vid sådana argument]

Men

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

och

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = a^2 + b^2 + 2|a||b|$$

så $(*)$ gäller om och endast om

$$2ab = 2|a||b| \qquad (**)$$

$(**)$ gäller om och endast om

$$\begin{cases} \text{antingen} & a \geq 0 \text{ och } b \geq 0 \\ \text{eller} & a \leq 0 \text{ och } b \leq 0 \end{cases}$$

Ett annat sätt att säga samma sak är: $(**)$ gäller om och endast om

$$\begin{cases} \text{antingen} & \text{minst ett av } a \text{ och } b \text{ är lika med noll} \\ \text{eller} & \text{både } a \text{ och } b \text{ är positiva} \\ \text{eller} & \text{både } a \text{ och } b \text{ är negativa} \end{cases}$$

4. Enligt sats 2.38 om

$$p(x) = (2a-5)x^2 + (5b+c)x + (c-a)$$

är noll för alla $x \in \mathbb{R}$ så är

$$(2a-5) = 0 \qquad (1)$$

$$(5b+c) = 0 \quad \text{och} \qquad (2)$$

$$(c-a) = 0 \qquad (3)$$

Så $(1) \Rightarrow a = 5/2$, $(3) \Rightarrow c = a = 5/2$ och $(2) \Rightarrow b = -\frac{c}{5} = (-\frac{5}{2})/5 = -2$

5 Systemet av ekvationer

$$\begin{cases} (2a-b)+(b-a)+(2c+a)=2 \\ (2a-b)+2(b-a)+4(2c+a)=2 \\ (2a-b)+3(b-a)+9(2c+a)=2 \end{cases}$$

är ekvivalent med

$$\begin{cases} (2a-8)+(b-a)+(2c+a)=0 \\ (2a-8)+2(b-a)+4(2c+a)=0 \\ (2a-8)+3(b-a)+9(2c+a)=0 \end{cases}$$

och det kan skrivas om som

$$q(x) := (2a-8)+(b-a)x+(2c+a)x^2=0$$

för $x=1,2,3$. Men enligt sats 2.37 om $q(x_i)=0$ för $x_1=1$, $x_2=2$ och $x_3=3$ så är

$$q(x)=0 \quad \text{för alla } x\in\mathbb{R}$$

Det vill säga

$$(2a-8)+(b-a)x+(2c+a)x^2=0 \quad \text{för alla } x\in\mathbb{R}.$$