Lektion 3

1 (a) Vi vill visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} = \frac{n^2}{2} \qquad (*)$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Först betraktar vi basfallet $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2} = \frac{2\cdot 1-1}{2} = \frac{1}{2} \text{ då } n=1$$

och

$$\frac{n^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \text{ då } n=1$$

Så $(*)$ stämmer då $n=1$.

Nu antar vi att $(*)$ gäller för $n=m$ för något $m \in \mathbb{N}$, och betraktar summan då $n=m+1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k-1}{2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2} + \frac{2(m+1)-1}{2}$$

$$\underset{(*) \text{ med } n=m}{=} \frac{m^2}{2} + \frac{2(m+1)-1}{2} = \frac{m^2+2m+1}{2}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{2}$$

Så $(*)$ gäller med $n=m+1$ under antagandet att det gäller för $n=m$.

Därför enligt induktion har vi visat att $(*)$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

2 (b) Vi vill visa att $2n+1 \leq 2^n$ för alla heltal $n \geq 3$.

Först betraktar vi basfallet $n=3$:

$$2n+1 = 2\cdot 3+1 = 6+1 = 7$$

och

$$2^n = 2^3 = 8$$

Eftersom $7 \leq 8$ så stämmer olikheten om $n=3$.

Nu antar vi att

$$2m+1 \leq 2^m. \qquad (\dagger)$$

för något $m \geq 3$ och betraktar fallet $n = m+1$:

$$2(m+1)+1 = (2m+1)+2$$
$$\underset{(\dagger)}{\leq} 2^m + 2 \underset{m \geq 3}{\leq} 2^m + 2^m = 2^m(1+1) = 2^{m+1}$$

så $2(m+1)+1 \leq 2^{m+1}$ om vi antar att $2m+1 \leq 2^m$.

Därför enligt induktion vet vi att

$$2n+1 \leq 2^n$$

för alla heltal $n \geq 3$.

4 (a) Problemet är att vi använder ekvivalenser vi vill bevisa i beviset och vi har en felaktig ekvivalenspil.

Vi har skrivit att $n^2 \leq n \iff (n+1)^2 \leq (n+1) \leq 3n+1$, men det stämmer inte. Det andra steget vi kan säga är

$$n^2 \leq n \iff n^2 + 2n+1 \leq 3n+1 \iff (n+1)^2 \leq 3n+1$$

och $(n+1) \leq 3n+1$ alltid stämmer för $n \in \mathbb{N}$, men det stämmer inte att $(n+1) \geq (n+1)^2$.

5 (a) Vi vill visa att

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \text{ för alla heltal } n \text{ och } k, \ 0 \leq k \leq n$$

Först betraktar vi bas fallet $n = 0$. Vi måste kolla att

$$\binom{0}{k} \in \mathbb{N} \text{ för } 0 \leq k \leq 0.$$

Det stämmer för att

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \in \mathbb{N}.$$

Nu antar vi att

$$\binom{m}{n} \in \mathbb{N} \text{ för något } m \in \mathbb{N}_0 \text{ och alla } 0 \le k \le m \qquad (\#)$$

och betraktar

$$\binom{m+1}{k} \text{ för } 0 \le k \le m+1$$

Om $k = 0$ så är

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m+1}{0} = \frac{(m+1)!}{0!\,(m+1)!} = 1$$

Om $k = m+1$ så är

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m+1}{m+1} = \frac{(m+1)!}{(m+1)!\,0!} = 1$$

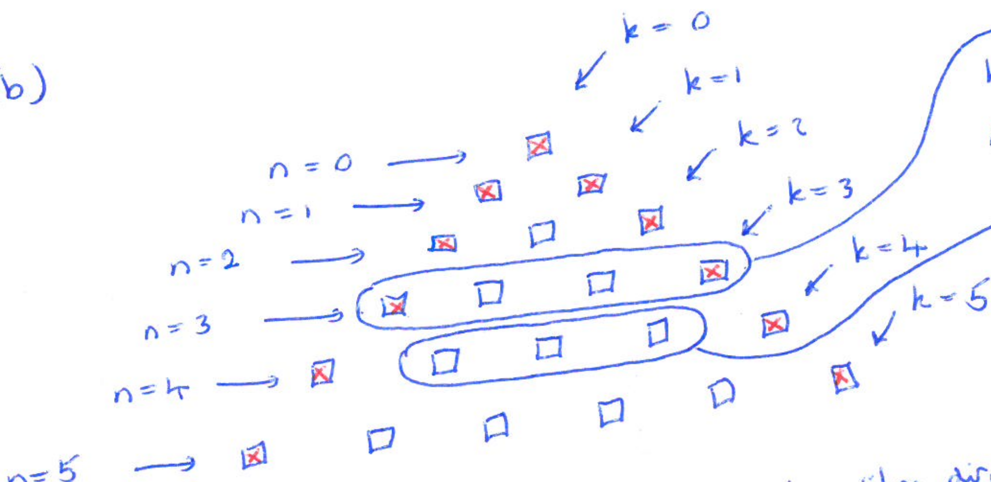
Om $0 < k < m+1$ så är

$$\binom{m+1}{k} = \underbrace{\binom{m}{k}}_{\in \mathbb{N} \text{ enligt } (\#)} + \underbrace{\binom{m}{k-1}}_{\in \mathbb{N} \text{ enligt } (\#)} \in \mathbb{N}$$

så $(\#)$ medför att $\binom{m+1}{k} \in \mathbb{N}$ för alla $0 \le k \le m+1$.

Enligt induktion är $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ för alla $n, k \in \mathbb{N}_0$ med $k \le n$.

(b)



Om man antar att de här är heltal kan man bevisa att de här är också heltal.

☒ = kan räkna direkt att man får ett heltal