Lektion 2

1 (a) 

2

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 7 \geq 2 \text{ och } x \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9/4 \text{ och } x \leq 4\}$

$= [9/4, 4] \neq [0, 4]$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 4 < 12 - 8x\}$ innehåller inte talet 4 eftersom $2(4)^2 + 4 = 36 \geq -20 = 12 - 8(4)$ så kan inte vara lika med intervallet $[0, 4]$

(c) $x^2 - 2x + 1 \leq 1 \iff x^2 - 2x \leq 0 \iff x(x-2) \leq 0$

För att vänstra ledet är icke-positivt krävs att antingen

$x \geq 0$ och $x - 2 \leq 0$, eller

$x \leq 0$ och $x - 2 \geq 0$

Det vill säga

$x \geq 0$ och $x \leq 2$, eller

$x \leq 0$ och $x \geq 2$ ⟵ omöjligt

Så vi vet $x^2 - 2x + 1 \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 2$.

Vi kan skriva om $8 \leq 6x - x^2$ som $(x-4)(x-2) \leq 0$ och genom samma argument som ovan får vi att det är ekvivalent med

$2 \leq x \leq 4$

Tillsammans, då får vi att

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 \leq 1 \text{ eller } 8 \leq 6x - x^2\} = [0, 2] \cup [2, 4]$

$= [0, 4]$

(d) ...

(e) ...

3 Vi vet att

$$(2n)! = \underbrace{(2n)(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}_{n \text{ gånger}}\underbrace{n(n-1)\dots 2\cdot 1}_{n \text{ gånger}}$$

och

$$n^n = \underbrace{nn\dots n}_{n \text{ gånger}} = \underbrace{nn\dots n}_{n \text{ gånger}}\underbrace{1\cdot 1\cdot\dots 1}_{n \text{ gånger}}$$

Men

$$\begin{aligned} n &\leq 2n \\ n &\leq 2n-1 \\ &\vdots \\ n &\leq n+1 \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} 1 &\leq n \\ 1 &\leq n-1 \\ &\vdots \\ 1 &\leq 2 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

Så

$$n^n = nn\dots n\, 1\cdot 1\cdot\dots\cdot 1 \leq (2n)(2n-1)\dots(n+1)\, n(n-1)\dots 2\cdot 1 = (2n)!$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n^n}{(2n)!} \leq 1$$

och därför är $\left(\frac{n^n}{(2n)!}\right)_n$ uppåt begränsad.

4
Här bevisar vi att $\sup A = 7$. Vi måste visa att

① 7 är en övre begränsning av A och

② varje tal mindre än 7 är inte en övre begränsning av A.

① Först vet vi att

$x \in A \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 < 4 \Leftrightarrow (x-7)(x-3) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7 < 0 \text{ och } x-3 > 0, \text{ eller} \\ x-7 > 0 \text{ och } x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \text{ och } x > 3, \text{ eller} \\ \underbrace{x > 7 \text{ och } x < 3}_{\text{omöjligt}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3 < x < 7 \Rightarrow x \leq 7$ så 7 är en övre begränsning.

② För att visa varje tal mindre än 7 är inte en övre begränsning betrakta $7 - \varepsilon$ och bevisa att det är inte en övre begränsning för godtyckliga $\varepsilon > 0$.

Sätt $x_0 = 7 - \min\{\varepsilon/2, 2\}$. Vi vet att

$$0 < \min\{3/2, 2\} < 4$$

så

$$3 = 7 - 4 < \underbrace{7 - \min\{3/2, 2\}}_{= x_0} < 7 - 0 = 7$$

Därför $x_0 \in A$. Dessutom

$$\min\{\varepsilon/2, 2\} < \varepsilon$$

så $x_0 = 7 - \min\{\varepsilon/2, 2\} > 7 - \varepsilon$.

Därför har vi hittat ett x_0 så att $x_0 \in A$ och $7 - \varepsilon < x_0$ och det säger att $7 - \varepsilon$ är ingen övrebegränsning. ∎