Lektion 14

3. Sätt $w = u + iv$ och $z = x + iy$ för $u, v, x, y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{*}$ Då är

$$wz = (u+iv)(x+iy) = (xu - vy) + i(vx + uy)$$

och

$$\overline{wz} = (xu - vy) - i(vx + uy) \quad (*)$$

Men

$$\bar{w}\,\bar{z} = (u - iv)(x - iy) = ux - vy - ivx - iuy$$

$$= (xu - vy) - i(vx + uy)$$

$$\underset{(*)}{=} \overline{wz}.$$

$\boxed{*}$ $$\overline{w+z} = \overline{(u+iv) + (x+iy)} = \overline{(u+x) + i(v+y)}$$

$$= (u+x) - i(v+y)$$

$$= (u - iv) + (x - iy)$$

$$= \bar{w} + \bar{z}$$

4. P är ett polynom med reella koefficienter så vi kan skriva

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{där } a_k \in \mathbb{R} \text{ för } k = 0, 1, \ldots, n$$

Vi vet att $P(z) = 0$ för någon z, så för samma z kan vi ta konjugatet av båda sidor av likheten:

$$0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k$$

$$\underset{a_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k$$

så $P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = 0.$