Lektion 12

2. Om $a \leq 1$ så är $\ln(a) \leq 0$ och $na^{1/n} \geq 0$ så

$$\ln(a) \leq 0 \leq na^{1/n} \quad \text{för} \quad 0 < a \leq 1$$

Om $a > 1$ kan vi använda uppgift 4(b) från lektion 11 med $x = \ln a > 0 \geq -n$:

$$a = \exp(\ln a) \geq \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^n \geq \left(\frac{\ln a}{n}\right)^n$$

så

$$a^{1/n} \geq \frac{\ln a}{n} \iff \ln a \leq na^{1/n}$$

Därför för alla $a > 0$ är $\ln a \leq na^{1/n}$.

3. (a) $\exp(\ln(4) - \ln(3)) + 2\exp(\ln(3))$

$$= \exp(\ln(4) - \ln(3^{-1})) + 2\exp(\ln(3))$$

$$= \exp(\ln(4 \cdot 3^{-1})) + 2\exp(\ln(3))$$

$$= 4 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3 = \frac{4}{3} + 6 = \frac{22}{3}$$

(b) $\exp(\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}))$

$$= \exp(\ln(\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}))$$

$$= \exp(\ln(\sqrt{x^2-1})) = \sqrt{x^2-1}$$

4. (a) För att ta ln behöver vi att $\frac{1-x}{3-x} > 0$, men vi vill också ta kvadratrot så kräver att

$$\ln\left(\frac{1-x}{3-x}\right) \geq 0$$

$$\iff \frac{1-x}{3-x} \geq 1.$$

Fall 1, $3 - x > 0$:

$$\frac{1-x}{3-x} \geq 1 \iff 1 - x \geq 3 - x \iff 1 \geq 3$$ som aldrig stämmer

så det finns ingen x så att $3 - x > 0$ och $\sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{3-x}\right)}$ är definierad

Fall 2, $3 - x < 0$

$$\frac{1-x}{3-x} \geq 1 \iff 1 - x \leq 3 - x \iff 1 \leq 3$$ som alltid stämmer

så $\sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{3-x}\right)}$ är definierat om $\underline{\underline{3 < x}}$.