LEKTION 11

1 Betrakta $x, y \in \mathbb{R}$ så att $x < y$. Vi kan skriva $y = x + h$ där för något $h > 0$.

Vi räknar

$$\exp(y) = \exp(x+h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 4.6}}}{=} \exp(x)\exp(h) \underset{\substack{\uparrow \\ \exp(x)>0 \\ \text{och} \\ \text{sats 4.4, 2}}}{\geq} \exp(x)(1+h)$$

$$= \exp(x) + \underbrace{h\exp(x)}_{>0 \text{ (sats 4.4, 1 och } h>0)} > \exp(x)$$

Därför är $\exp(x) < \exp(y)$ och exp är strängt växande.

Alternativt bevis Betrakta $x < y$. Eftersom $\exp(x) \overset{\text{sats 4.4, 1}}{>} 0$ kan vi räkna

$$\frac{\exp(y)}{\exp(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 4.4, 3}}}{=} \exp(y)\exp(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 4.6}}}{=} \exp(y-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sats 4.4, 2}}}{\geq} 1 + \underbrace{(y-x)}_{>0} > 1$$

så $\exp(x) < \exp(y)$ och exp är strängt växande

2 (a) $$\frac{\exp(x+3)\exp(x+2)}{\exp(x^2+5x+5)} = \exp(x+3)\exp(x+2)\exp(-x^2-5x-5)$$

$$= \exp(x+3+x+2)\exp(-x^2-5x-5)$$

$$= \exp(-x^2-5x-5+x+3+x+2)$$

$$= \exp(-x^2-3x)$$

[Man kan förstås diskutera vad är den enklaste form, men den är minst enklare än den vi började med.]

3

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1+\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1+\frac{n-(n+1)}{(n+1)n+(n+1)}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{>0}$$

$$\geq \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Bernoullis ulikhet $\left(-\frac{1}{(n+1)^2} > -1\right)$

$$= \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3+n^2+n+2n^2+2n+2}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} \geq 1$$

$2 \geq 1$

4(b)

$$\exp(x) = \exp\left(n\frac{x}{n}\right) = \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Eftersom $\exp\left(\frac{x}{n}\right) \underbrace{\geq}_{\text{sats 4.4, del 2}} 1+\frac{x}{n} \underbrace{\geq 0}_{x \geq -n}$

Om vi tar $n=2$ får vi att

$$\exp(x) \geq \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} \quad \text{för } x \geq -2$$

Vi behöver $\frac{x}{n} \geq -1$ för att $\exp\left(\frac{x}{n}\right) \geq 1+\frac{x}{n}$ kan medföra $\exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

[Om $\frac{x}{n} < -1$ är $1+\frac{x}{n} < 0$ så $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 0$ om n är udda, men $\exp\left(\frac{x}{n}\right)^n > 0$ enligt sats 4.4, del 1.]