Lektion 10

1 (a) $\exp(x+y) \overset{\text{sats 4.6}}{=} \exp(x)\exp(y) = \sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

(b) $\exp(2x) \overset{\text{sats 4.5}}{=} \exp(x)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

(c) $\exp(2x+2y) \underset{\text{sats 4.6}}{=} \exp(2x)\exp(2y) \underset{\text{sats 4.5}}{=} \exp(x)^2 \exp(y)^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{8})^2 = 16$

2 (a) $$\frac{\exp(2x)\exp(-y)}{\exp(x-y)} \underset{\text{sats 4.4, del 3}}{=} \exp(2x)\exp(-y)\exp(-(x-y))$$

$$\underset{\text{sats 4.6}}{=} \exp(2x-y-x+y) = \exp(x)$$

3

$$\exp(2x+3) = \exp(2x) + \exp(3)$$

$$\Leftrightarrow \exp(2x+3) - \exp(2x) - \exp(3) = 0$$

$$\underset{\text{sats 4.6}}{\Leftrightarrow} \exp(3)\exp(2x) - \exp(2x) - \exp(3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exp(3)-1)\exp(2x) = \exp(3)$$

$$\underset{\text{sats 4.5}}{\Leftrightarrow} (\exp(3)-1)(\exp(x)^2) = \exp(3)$$

$$\Leftrightarrow \exp(x)^2 = \frac{\exp(3)}{\exp(3)-1} \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x) = \pm\sqrt{\frac{\exp(3)}{\exp(3)-1}}$$

ty $\exp(3) - 1 \overset{\text{sats 4.4, del 2}}{\geq} (1+3) - 1 > 0$

Men $\exp(x) > 0$ för alla x, så det ända möjliga värdet är

$$\exp(x) = \sqrt{\frac{\exp(3)}{\exp(3)-1}} .$$

4. Om $n > 1$ är

$$\exp_n(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

så

$$e = \sup_{m \in \mathbb{N}} \exp_m(1) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{för varje } n > 1$$

Vi kan också använda sats 4.4, del 2 och får

$$e = \exp(1) \geq 1 + 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{om } n = 1$$

Därför är

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$

För att bevisa andra olikheten kan vi titta på vad $B(x)$ är i beviset av sats 4.3:

$$B(x) := \left(1 - \frac{x}{\lceil x \rceil + 1}\right)^{-(\lceil x \rceil + 1)}$$

så

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq B(1) = \left(1 - \frac{1}{1+1}\right)^{-(1+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}$$

Därför är

$$e = \sup \exp_n(1) \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Om vi tar $n = 2$ i olikheterna får vi

$$\frac{9}{4} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

[Om man tycker att det är orättvist att använda sats 4.4 när jag tipsade att (4.3) och sats 4.3 skulle räcka kan man göra så här istället:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1+1)^1 = 2 < \frac{9}{4} \underset{\text{ovan}}{\leq} e \quad \text{om } n = 1.$$
]