LEKTION 1

1(a) Vi har två implikationer att bevisa:

$$① \quad -2 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \quad ; \text{ och}$$

$$② \quad x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$

För att bevisa ① delar vi det i två fall.

Fall 1 $0 \leq x < 2$. Eftersom x är icke negativ kan vi multiplicera båda sidor av $x < 2$ med x, så

$$x^2 < 2x$$

Vi kan också multiplicera med 2, så vi får

$$2x < 4$$

Därför ser vi att

$$x^2 < 2x < 4 \Rightarrow x^2 < 4$$

Fall 2 $-2 < x < 0$. När vi multiplicera $\overbrace{\text{olikheten}}^{\text{båda sidor av}}$ $-2 < x$ med x får vi

$$-2x > x^2$$

eftersom $x < 0$. Och genom att multiplicera med -2 får vi att

$$4 > -2x$$

Därför är

$$x^2 < -2x < 4 \Rightarrow x^2 < 4.$$

① är därför bevisat.

För att bevisa ② betraktar vi kontrapositionen istället. Den är

$$\text{antingen } x \leq -2 \text{ eller } x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$$

Om $x \geq 2$ vi får att $x^2 \geq 2x$ eftersom vi kan multiplicera båda sidor av olikheten med positiva talet x. Vi kan också få $2x \geq 4$ genom att multiplicera med 2. Därför är

$$x^2 \geq 2x \geq 4 \Rightarrow x^2 \geq 4$$

Om $x \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq -2x & \text{eftersom } x \text{ är negativt} \\ -2x \geq 4 & \text{eftersom } -2 < 0. \end{cases}$ Så $x^2 \geq -2x \geq 4$ $\Rightarrow x^2 \geq 4$

2 (b) $x^2 < 20 \Rightarrow x < 5$

3 (b) Betrakta $x = -5$. Då är $x^2 = (-5)^2 = 25 \geq 20$ men $x = -5 < 5$. Därför "$x^2 \geq 20$" kan inte medföra "$x \geq 5$".

4 (e) Det finns ett heltal så att $4n^2 - 12n + 8 < 0$.

5 (e) "Om n är ett heltal är $4n^2 - 12n + 8 \geq 0$" är ett sant påstående.

Vi kan skriva om $4n^2 - 12n + 8 \geq 0$ som

$$(2n-3)^2 - 1 \geq 0.$$

Trots att det stämmer inte om, till exempel $n = 3/2$ vi är bara intresserad av heltal n. Men samma metoden som uppgift 1 kan vi visa att

$$n \geq 2 \Rightarrow (2n-3)^2 - 1 \geq 0 \quad \text{och}$$
$$n \leq 1 \Rightarrow (2n-3)^2 - 1 \geq 0$$

så påståendet stämmer.

6 Vi vet att det finns positiva heltal q_1 och q_2 så att

$$n_1 = 7q_1 + 2 \quad \text{och}$$
$$n_2 = 7q_2 + 2$$

enligt definition 2.1. Därför är

$$n_1 n_2 = (7q_1 + 2)(7q_2 + 2)$$
$$= 49 q_1 q_2 + 14 q_1 + 14 q_2 + 4$$
$$= 7 \underbrace{(7 q_1 q_2 + 2q_1 + 2q_2)}_{\text{ett heltal och positivt}} + 4$$

Därför enligt definition 2.1 har $n_1 n_2$ delat med 7 rest 4.

8 (a) $7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$ så skrivs som 111 i det binära talsystemet.
$17 = 16 + 1 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$ så skrivs som 10001.
$12 = 8 + 4 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$ så skrivs som 1100.
$32 = 2^5$ så skrivs som 100000.