TATA79/TEN5 **Dugga 1, 2015-11-18**

Inledande matematisk analys

1. Kom ihåg axiomen vi har antagit i kursen hittills:

I **De algebraiska axiomen:**

(a) $a + b = b + a$ och $ab = ba$ för alla reella tal a och b (kommutativa lagarna);

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(ab)c = a(bc)$ (associativa lagarna);

(c) $a(b + c) = ab + ac$ för alla reella tal a, b och c (distributiva lagen);

(d) Det finns två olika tal 0 och 1 så att $a + 0 = a$ och $a \times 1 = a$ för alla reella tal a (existens av neutrala element);

(e) Till varje $a \neq 0$ finns det inversa element $-a$ och a^{-1} så att $a+(-a) = 0$ och $a \times a^{-1} = 1$ (existens av invers).

II **Ordningens axiom:**

(a) För godtyckliga a och b gäller en och endast en av möjligheterna $a < b$, $a = b$ och $a > b$ (trikotomi);

(b) $a < b$ och $b < c$ medför att $a < c$ (transitiva lagen);

(c) $a < b$ medför att $a + c < b + c$ för alla reella tal c;

(d) $a < b$ och $0 < c$ medför att $ac < bc$.

Betrakta ett reellt tal a. Använda axiomen för att bevisa att det finns högst ett tal $b \in \mathbf{R}$ så att $a + b = 0$.

Solution:

Enligt I(e) finns det $-a \in \mathbf{R}$ så att $a + (-a) = 0$. Anta att det finns två reella tal b_1 och b_2 så att $a + b_1 = 0$ och $a + b_2 = 0$. Då

$$\begin{aligned} b_1 &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(d)}}}{=} b_1 + 0 = b_1 + (a + (-a)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(b)}}}{=} (b_1 + a) + (-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(a)}}}{=} (a + b_1) + (-a) \\ &= 0 + (-a) = (a + b_2) + (-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(a)}}}{=} (b_2 + a) + (-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(b)}}}{=} b_2 + (a + (-a)) \\ &= b_2 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I(d)}}}{=} b_2. \end{aligned}$$

2.

(a) Definiera vad det betyder att säga ℓ är en infimum till en mängd A.

(b) Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{n-1}{n}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

(i) Bevisa att $\inf_n a_n = 0$.

(ii) Bevisa att $\inf_n b_n = 0$.

Solution:

(a) Det betyder att

(i) $\ell \leq a$ för alla $a \in A$, och

(ii) för varje $\varepsilon > 0$ finns det $a \in A$ så att $a < \ell + \varepsilon$.

(b) (i) i. Ett positivt tal delat med ett annat är positivt så $0 < 1/n$ och i synnerhet är $0 \leq 1/n = a_n$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Om vi ta n lika med ett naturligt tal större än $1/\varepsilon$ då är $1/\varepsilon < n$ och därför $a_n = 1/n < 0 + \varepsilon$ för detta val av n.

(ii) i. Ett ickenegativt tal delat med ett positivt tal är ickenegativt så $0 \leq (n-1)/n$ och i synnerhet är $0 \leq (n-1)/n = b_n$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

ii. Betrakta $\varepsilon > 0$. Vi har att

$$b_1 = \frac{1-1}{1} = 0 < 0 + \varepsilon.$$

Så för vilket $\varepsilon > 0$ som helst är b_1 så att $b_1 < 0 + \varepsilon$.

---

3. Bevisa att

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

Solution:

Det finns ju flera sätt att bevisa formeln. Ett sätt är med induktion.

Om $n = 0$ är vänsterledet $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 1$ och högerledet är $(1+1)^2 = 1$ så likheten stämmer då.

Nu antar vi att likheten stämmer för $n = m$ och vi betraktar likheten då $n = m+1$. Vi får att

$$\sum_{k=0}^{m+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{m}(2k+1)+(2(m+1)+1) = (m+1)^2+2(m+1)+1 = ((m+1)+1)^2,$$

så vi kan dra slutsatsen att likheten stämmer om $n = m+1$. Därför enligt induktion gäller likheten för alla $n \in \mathbf{N}$.

4.

(a) Definiera begreppet *växande* som gäller för en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{om } x \neq 0, \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

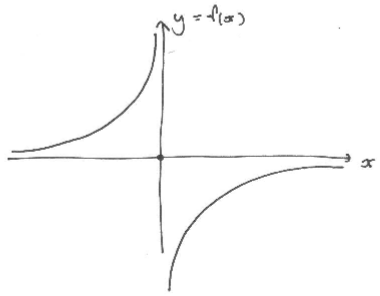
(i) Skissa grafen av f.

(ii) Visa att f är inte växande.

Solution:

(a) En funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kallas för *växande* om $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) (i) Grafen av f ser ut lite så här:



(ii) För att visa att f inte är växande måste vi hitta två tal x och y så att $x < y$ men $f(x) > f(y)$. Det räcker att ta $x = -1$ och $y = 1$: Då är $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$, så f är inte växande. (It is however, increasing on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ separately.)

5.

(a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

för $a, r \in \mathbf{R}$ så att $r \neq 1$.

(b) Räkna summan

$$\sum_{k=1}^{27} 4(-1)^k.$$

Solution:

(a) Det finns flera metoder. Till exempel sätt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$$

Då är $S_{n+1} = S_n + ar^n$ och

$$S_{n+1} = a + r\sum_{k=1}^{n-1} ar^{k-1} = a + rS_n.$$

Därför

$$S_n + ar^n = a + rS_n$$

som medför att

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(b) Vi använder formen i (a) med $n = 27$, $r = -1$ och $a = -4$, så

$$\sum_{k=1}^{27} 4(-1)^k = \sum_{k=1}^{27} -4(-1)^{k-1} = -4\frac{1-(-1)^{27}}{1-(-1)} = -4.$$
