TATA79/TEN3 **Tentamen, 2016-08-16**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Anta att $k \in \mathbf{N}$ och $a \in \mathbf{R}$ uppfyller villkoren

$$k \geq a - 1 \quad \text{och} \quad k! > a^k. \tag{$\spadesuit$}$$

Bevisa att villkoren i ($\spadesuit$) medför att $n! > a^n$ for alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq k$.

(b) Vilket är det minsta naturliga talet k så att villkoren ($\spadesuit$) stämmer om $a = 2$?

Solution:

(a) Man kan använda induktion för att visa

$$n! > a^n \tag{1}$$

for alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq k$. Bas fallet $n = k$ i (1) är ett av villkoren vi antar, så vi behöver inte visa det. Nu antar vi att (1) stämmer för $n = \ell$ och betraktar fallet $n = \ell + 1$:

$$(\ell + 1)! = \ell!(\ell + 1) > a^\ell(\ell + 1) \underset{\ell+1 \geq k+1 \geq a}{\geq} a^\ell a = a^{(\ell+1)}$$

som är (1) med $n = \ell + 1$. Enligt induktion har vi visat att (1) stämmer för alla $n \geq k$.

(b) $k = 4$.

2.

Använd att

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi,$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

och

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

för alla $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ för att visa

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

Solution:

Man kan räckna ut att

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ &= \cos(\theta+\theta)\cos\theta - \sin(\theta+\theta)\sin\theta \\ &= (\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta)\cos\theta - (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\sin\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

Och därför är

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta)+3\cos\theta}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

3.

(a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Använd bara egenskaper av exponential- och logaritmfunktionen för att visa $x \mapsto a^x$ är en växande funktion om $a > 1$.

Solution:

(a) $a^x := \exp(x\ln(a))$ för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Det räcker att visa $a^{x+h} - a^x \geq 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $h > 0$. Men enligt definitionen av irrationella potenser vet vi att

$$\begin{aligned}a^{x+h} - a^x &= \exp((x+h)\ln(a)) - \exp(x\ln(a)) = \exp(x\ln(a))\exp(h\ln(a)) - \exp(x\ln(a)) \\ &= \exp(x\ln(a))(\exp(h\ln(a)) - 1) = a^x(a^h - 1)\end{aligned}$$

och $a^x := \exp(x\ln(a)) > 0$ (sats 4.4(1)) så det räcker att visa $(a^h - 1) \geq 0$. Vi vet att $\exp(x) \geq 1 + x$ (sats 4.4(2)). Därför är

$$a^h = \exp(h\ln(a)) \geq 1 + h\ln(a).$$

Eftersom $\ln(a) \geq (a-1)/a > 0$ om $a > 1$ (sats 4.7(4)) och $h > 0$ är då $a^h \geq 1 + 0 = 1$ och vi har visat att $x \mapsto a^x$ är en växande funktion.

---

4. Bevisa att

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for varje $n \in \mathbf{N}$.

Solution: Vi använder oss av induktion for att visa

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

Först kan vi kontrollera att (2) stämmer när $n = 1$. Då har vi att

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 \quad \text{och} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1,$$

så (2) stämmer för $n = 1$. Nu antar vi att det finns ett tal $m \in \mathbf{N}$ så att (2) gäller för $n = m$ (vi vet att det finns minst ett sådant m eftersom vi precis har bevisat likheten (2) då $n = 1$) och försöker bevisa (2) i fallet $n = m + 1$: Vi räknar

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet ovan}}}{=} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2.$$

Men

$$\begin{aligned}
&\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} = \frac{(m+1)\left(m(2m+1) + 6(m+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(m+1)\left(2m^2 + 7m + 6\right)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \\
&= \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Därför

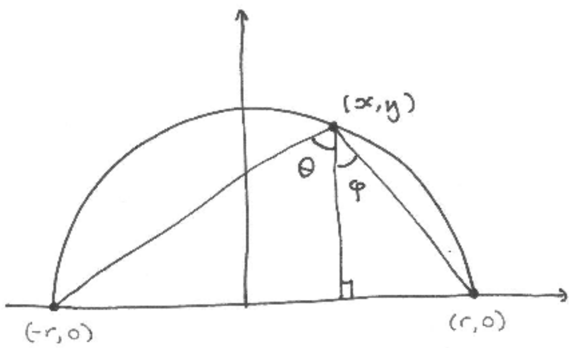
$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6},$$

som säger (2) gäller med $n = m + 1$.

Så vi har bevisat att om (2) gäller med $n = m$ för något $m \in \mathbf{Z}^+$ så gäller det med $n = m + 1$. Vi har också kontrollerat att (2) gäller för $n = 1$. Så vi drar slutsatsen att (2) gäller för alla $n \in \mathbf{N}$.

5.

(a) Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2 + y^2 = r^2$. Låt $y > 0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta + \varphi) = 0$ för alla (x, y).



Solution: Vi kan direkt se att

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}}, \quad \sin\theta = \frac{x+r}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}},$$
$$\cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (r-x)^2}} \quad \text{och} \quad \sin\varphi = \frac{r-x}{\sqrt{y^2 + (r-x)^2}}.$$

Därför kan vi räkna

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ &= \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}} \frac{y}{\sqrt{y^2 + (r-x)^2}} - \frac{x+r}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}} \frac{r-x}{\sqrt{y^2 + (r-x)^2}}\\ &= \frac{y^2 - (x+r)(r-x)}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}\sqrt{y^2 + (r-x)^2}} = \frac{y^2 + x^2 - r^2}{\sqrt{y^2 + (x+r)^2}\sqrt{y^2 + (r-x)^2}} = 0\end{aligned}$$

6.

(a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att

$$\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

för alla reella tal x och y. Endast definitioner och trigonometriska räknelagar får användas utan att de först bevisas.

Solution:

(a) $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b)

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}}{e^{iy}} &= \frac{\cos x + i\sin x}{\cos y + i\sin y} = \frac{(\cos x + i\sin x)(\cos y - i\sin y)}{(\cos y + i\sin y)(\cos y - i\sin y)} \\ &= (\cos x\cos y + \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y - \cos x\sin y) \\ &= \cos(x-y) + i\sin(x-y) = e^{i(x-y)}.\end{aligned}$$

7.

(a) Kom ihåg att $k! := \prod_{j=1}^{k} j = k(k-1)\ldots 2\times 1$ för $k \in \mathbf{N}$. Visa att

$$k! > (k/2)^{k/2} \tag{$\clubsuit$}$$

för jämna $k \in \mathbf{N}$. (Oliketen ($\clubsuit$) gäller även för udda k men det behövs inte visas.)

(b) Använd ($\clubsuit$) för att visa villkoren

$$k \geq a - 1 \quad \text{och} \quad k \geq 2a^2$$

medför dem i ($\spadesuit$).

Solution:

(a) Definitionen av $k!$ medför att

$$k! = \prod_{j=1}^{k} j > \prod_{j=k/2+1}^{k} j > \prod_{j=k/2+1}^{k} \frac{k}{2} = \left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}.$$

(b) Det första villkoret är det samma som det första i ($\spadesuit$). Den andra medför att

$$k! > (k/2)^{k/2} \geq a^k$$

som är den andra i ($\spadesuit$).
