Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Visa att lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen $x^2 = 3$ är irrationella.

(2) (a) Med hjälp av en bild definiera trigonometriska funktioner cosinus och sinus. Skissa graphen av $\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Med hjälp av en bild bevisa att

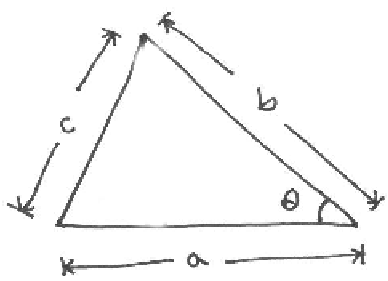
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

för θ och φ som uppfyller $\theta \geq 0$, $\varphi \geq 0$ och $\theta + \varphi \leq \pi/2$.

(3) Kom ihåg cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

där a, b, c och θ ges i figuren nedan.



Använder cosinussatsen eller en annan metod för att visa

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

(4) Bevisa Bernoullis olikheten: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{N}$ får man att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(5) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \le |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|. \end{cases}$$

(a) Definiera funktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$.

(b) Visa att $\exp(x) \ge 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(6) (a) Definiera funktionen $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$.

(b) Kom ihåg att $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Visa att $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ för alla $a, b \in (0, \infty)$.

(c) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2 - x - 12}{x + 1}\right) + \ln(x + 3) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om $(\diamondsuit)$ så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

(7) Lös ekvationen $z^2 - 6z - 3 - 4i = 0$ för $z \in \mathbf{C}$.