Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. **Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.** Lycka till!

(1) Kom ihåg axiomen vi har antagit i kursen hittills:

I **De algebraiska axiomen:**

(a) $a + b = b + a$ och $ab = ba$ för alla reella tal a och b (kommutativa lagarna);

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(ab)c = a(bc)$ (associativa lagarna);

(c) $a(b + c) = ab + ac$ för alla reella tal a, b och c (distributiva lagen);

(d) Det finns två olika tal 0 och 1 så att $a + 0 = a$ och $a \times 1 = a$ för alla reella tal a (existens av neutrala element);

(e) Till varje $a \neq 0$ finns det inversa element $-a$ och a^{-1} så att $a + (-a) = 0$ och $a \times a^{-1} = 1$ (existens av invers).

II **Ordningens axiom:**

(a) För godtyckliga a och b gäller en och endast en av möjligheterna $a < b$, $a = b$ och $a > b$ (trikotomi);

(b) $a < b$ och $b < c$ medför att $a < c$ (transitiva lagen);

(c) $a < b$ medför att $a + c < b + c$ för alla reella tal c;

(d) $a < b$ och $0 < c$ medför att $ac < bc$.

Använda axiomen för att bevisa att $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$.

(2) (a) Definiera vad det betyder att säga ℓ är en supremum till en mängd A.

(b) Betrakta följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ som definieras enligt

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{6n+2}{2n+1}$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

(i) Bevisa att $\sup_n a_n = 1/3$.

(ii) Bevisa att $\sup_n b_n = 3$.

(iii) Nu definierar vi en följd $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ enligt formeln $c_n = a_n + b_n$ för alla $n \in \mathbf{N}$. Bevisa att $\sup_n c_n = 3$.

(3) Bevisa att

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

(4) (a) Definiera begreppet *avtagande* som gäller för en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{om } x \leq 0, \\ -\frac{x}{x+2} & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

(i) Skissa grafen av f.

(ii) Visa att f är avtagande.

(5) (a) Definiera en rätvinklig triangel.

(b) Bevisa Pythagoras sats: Om en rätvinklig triangel har sidor med längderna a, b och c och c är längden av hypotenusan så är $a^2 + b^2 = c^2$.