Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Med hjälp av en bild bevisa Pythagoras sats som gäller för rätvinkliga trianglar.

(2) (a) Med hjälp av en bild definiera trigonometriska funktioner cosinus och sinus. Skissa graphen av $\cos\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

(b) Med hjälp av en bild bevisa att

$$\sin(\theta) \leq \theta$$

för $\theta \in [0, \pi/2]$.

(3) (a) Definiera funktionen tangens. Glöm inte att ge definitionsmängden.

(b) Använd

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \quad \text{och} \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

för att visa

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

för de flesta θ och φ. För vilka θ och φ är likheten odefinierad?

(4) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Använd räknareglar för den exponentialfunktionen för att visa $a^{x+y} = a^x a^y$ för $a > 0$ och $x, y \in \mathbf{R}$.

(5) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|. \end{cases}$$

(a) Definiera funktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to (0, \infty)$.

(b) Visa att $\exp(x) \geq 1 + x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(6) (a) Definiera funktionen $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$.

(b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är

$$\ln\left(\frac{x^2+2x-3}{x+7}\right) - \ln(x+3) \qquad (\diamondsuit)$$

definierat? Skriva om $(\diamondsuit)$ så att det inhåller högst en logaritm. För vilka $x \in \mathbf{R}$ är din omskrivning definierad?

(7) (a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa Eulers identitet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$