

**Instruktioner:** Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hjälpmedel tillåtna. Lycka till!

- (1) Visa att lösningar  $x \in \mathbf{R}$  till ekvationen  $x^2 = 2$  är irrationella.
- (2) (a) Skissa grafen av den trigonometriska funktionen tangens. Vad är funktionens definitionsmängd?  
(b) Med hjälp av en bild bevisa att

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \quad (\clubsuit)$$

och

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

för  $\theta$  och  $\varphi$  som uppfyller  $\theta \geq 0$ ,  $\varphi \geq 0$  och  $\theta + \varphi \leq \pi/2$ .

- (3) Med hjälp av  $(\clubsuit)$  (som du kan anta gäller för alla  $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ ) och den trigonometriska etten (eller genom en annan metod) visa att

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla  $\theta \in \mathbf{R}$  och speciellt

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

- (4) (a) Definiera  $a^x$  för  $a > 0$  och  $x \in \mathbf{R}$ .  
(b) Använder räknareglar för den exponentialfunktionen för att visa  $a^{x+y} = a^x a^y$  för  $a > 0$  och  $x, y \in \mathbf{R}$ .
- (5) Betrakta ekvationen  $ax^2 + bx + c = 0$  för givna reella tal  $a, b$  och  $c$  med  $a \neq 0$ . Visa att tecken av  $b^2 - 4ac$  bestämmer antalet lösningar  $x \in \mathbf{R}$  till ekvationen.

(6) (a) Definiera funktionen  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ .

(b) För vilka  $x \in \mathbf{R}$  är

$$\ln \left( \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 8} \right) + \ln(x + 8) \quad (\diamond)$$

definierad? Skriv om  $(\diamond)$  så att det innehåller högst en logaritm. För vilka  $x \in \mathbf{R}$  är din omskrivning definierad?

(7) Hitta fem lösningar  $z \in \mathbf{C}$  till ekvationen  $z^5 = 2$ .