Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Ge negationen av påståendet:

”Alla barn kan gråta.”

(b) Utred med bevis om påståendet

$$\text{”}x < -4 \implies x^2 - x > 19\text{”}$$

är sant eller falskt.

(c) Skriv kontrapositionen av påståendet i (b). Är kontrapositionen sann eller falsk?

(2) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

för alla positiva heltal n.

(3) Fibinacci talföljd $(F_n)_n$ definieras av villkoren

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & \text{för } n \geq 1 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Räckna ut F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 och F_6. Vilka är jämna?

(b) Visa att $F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n$ för alla $n \geq 1$.

(c) Visa att vart tredje tal från och med talet F_3 är jämnt.

(4) Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen $2\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 3 = 0$.

(5) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

(6) (a) Kom ihåg att $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ för $x < 1$. Använd den tillsammans med andra räknareglar för att visa

$$\ln(a) \geq \frac{a-1}{a}$$

för alla $a > 0$.

(b) Skissa grafen av den naturliga logaritmfunktionen $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$.

(7) (a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 5 + 12i$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 + (4 + 2i)z - 2 - 8i = 0$.