Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Ge negationen av påståendet:

"Alla hundar kan skälla."

(b) Visa att om

- n_1 delat med 7 har rest 2, och
- n_2 delat med 7 har rest 2,

då har $n_1 n_2$ delat med 7 rest 4.

(2) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

för alla positiva heltal n.

(3) Hitta alla möjliga par av ickenegativa reella tal a och b så att $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(4) (a) Bevisa att

$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)}{2}$$

för alla $\theta, \phi \in \mathbf{R}$.

(b) Skriv om $\sin(\theta)\cos(\phi)$ på ett liknande sätt, det vill säga skriv om det till ett uttryck som innehåller bara trigonometriska funktioner av $\theta+\phi$ och $\theta-\phi$.

(5) Kom ihåg att

$$\exp_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \leq |x|, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{om } n > |x|, \end{cases}$$

för positiva heltal n och $x \in \mathbf{R}$.

(a) Definiera exponentialfunktionen $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och talel e.

(b) Visa att

$$\exp_n(x) \leq \exp(x) \leq \frac{1}{\exp_n(-x)}$$

om $n > |x|$.

(c) Använd (b) för att visa

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

för alla $n \geq 3$.

(6) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Visa att $a^{xy} = (a^x)^y$ för $a > 0$ och $x, y \in \mathbf{R}$.

(7) Kom ihåg att absolutbeloppet av ett reelt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(a) Definiera absolutbeloppet $|z|$ av ett komplext tal z och visa att den stämmer överens med definitionen för reella tal i fallet imaginärdelen av z är noll.

(b) Visa att $|zw| = |z||w|$ for alla komplexa tal z och w.