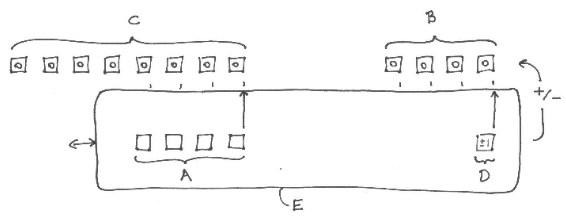
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Joakim Arnlind/David Rule

Vinjetter

1. Ett rationellt tal definieras som ett tal som kan skrivas som ett bråk mellan heltal. Men hur ser decimalutvecklingen av ett rationellt tal ut? Kan man ta reda på direkt från ett tals decimalutveckling om det är rationellt eller inte? Jobba tillsammans för att få reda på hur en decimalutveckling av ett rationellt tal måste ser ut.

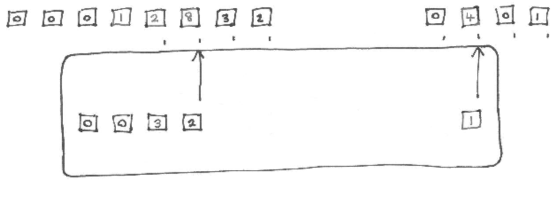
2. En mekanisk räknare består av två rader med fyrkanter. Varje fyrkant kan hålla en siffra. Den övre raden delas i två delar: 8 fyrkanter till vänster (C) och 4 fyrkanter till höger (B). Från början innehåller B och C talen 0 i varje fyrkant. Den nedre raden (E) delas också i två delar: 4 tomma fyrkanter till vänster (A) och en till till höger (D) som innehåller siffran 1 eller -1. Den nedre raden kan flyttas upp till fyra steg till vänster från utgångsläget som visas i figur nedan.



Hitta en effektiv algoritm för att addera, multiplicera och dividera två tal med antangandet att man kan göra följande operationer så mânger gånger man vill. Man kan

(a) föra in siffror i fyrkanter i A.
(b) föra in antingen 1 eller -1 i fyrkanten D.
(c) flytta nedre raden upptill fyra steg till vänster och tillbaka.
(d) addera den nedre raden till den övre utgående från den nedre radens position.
(e) subtrahera den nedre raden från den övre utgående från den nedre radens position.

Till exempel, om man för in ”0032” i A och ”1” i D (enligt (a) och (b)), adderar den nedre raden till den övre (enligt (d)), flyttar den nedre raden E två steg till vänster (enligt (c)) och slutligen adderar den nedre och övre raden tre gånger (enligt (d)), får man ”00012832” i B och ”0401” i C.



3. En bonde har ett stängsel av en given längd och vill avgränsa en rektangulär hage så att det blir så stor plats som möjligt för hans kor. Du råkar passera förbi när bonden står och kliar sig i huvudet och bestämmer dig för att hjälpa till. Hur ska hagen se ut för att ha så stor area som möjligt? Bonden, vars matematikstudier ligger långt tillbaka i tiden, måste övertygas med ett vattentätt resonemang.

   När ni står och beundrar den färdigställda hagen vänder sig plötsligt bonden om och frågar om han inte kan få en ännu större hage med det stängsel han har?

4. I grundläggande navigationsstudier får man ofta lära sig att uppskatta avståndet till horisonten, så att man till exempel kan avgöra vilka sjömärken man borde kunna se. En regel som är lätt att komma ihåg är följande: Antag att ögonen befinner sig h meter ovanför vatten ytan. Då är avståndet till horisonten ungefär $2\sqrt{h}$ distansminuter. (En distansminut är 1852 m). Härled en exakt formel för avståndet till horisonten på en sfär med radien R och försök sedan bekräfta ovan nämnda tumregel för jordklotet (vars medelradie är 6371 km). I själva verket är $2\sqrt{h}$ en bättre approximation (vid normala väderförhållanden) än vad ni tycks finna, på grund av att jordens atmosfär bryter ljuset.

5. Hitta en formel för hur tjockt ett papper blir som har vikts n gånger, givet att papprets ursprungliga tjocklek är d. Om du hade ett tillräckligt stort papper, hur många gånger skulle du behöva vika ett papper med tjocklek 0.1 mm för att få en pappershög som når till Mount Everests topp? Till månen? Till randen av vårt synliga universum? Det finns en formel som ger en teoretisk gräns för sidlängden W ett kvadratiskt papper behöver ha för att man ska kunna vika det n gånger (där man viker åt olika håll varannan gång); nämligen

$$W = \pi d \cdot 2^{\frac{3}{2}(n-1)}$$

   där d återigen betecknar tjockleken på pappret. Hur stort papper behövs för de exempel som nämns ovan? Hur många gånger borde man kunna vika ett vanligt A4-papper enligt denna formel? (Formeln ovan härleddes för övrigt av gymnasieeleven Britney Gallivan.)

6. Formeln för att beräkna en geometrisk summa

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

   gäller även för komplexa tal z; man kan också visa att om $|z| < 1$ så gäller det att

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

   Hur kan man resonera sig fram till att detta är troligt? Använd ovan förvärvade kunskaper på följande problem: En opraktisk orienterare tar sig till en viss kontroll från där han står genom att springa 1 km rakt österut, vända 90 grader moturs, springa 500 m (nu norrut), vända 90 grader moturs, springa 250 m (nu västerut), vända 90 grader moturs, springa 125 m (nu söderut) och så vidare, genom att fortsatt vrida sig 90 grader moturs och halvera sträckan. Var ligger kontrollen i förhållande till där han startade? Rita även orienterarens väg på tavlan för att kontrollera att ert svar verkar stämma.