

# Partiella differentialekvationer\* (TATA27)

Linköpings universitet

Vår termin 2015

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>1</b>
1.1	Notation . . . . .	1
1.2	Differentialekvationer . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Linjära första ordningens ekvationer och metoden med karakteristiska kurvor</b>	<b>3</b>
2.1	Metoden med karakteristiska kurvor . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Det fysiska ursprunget till några PDE</b>	<b>4</b>
3.1	Vibrationer och vågekvationen . . . . .	4
3.2	Diffusion och värmeledningsekvationen . . . . .	5
3.3	Harmoniska funktioner . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Randvillkor och välståndhet</b>	<b>6</b>
4.1	Funktionsrum . . . . .	6
4.2	Begynnelsevillkor . . . . .	6

## 1 Introduktion

### 1.1 Notation

Skrivsättet för derivator är välkänt från kurser ni har läst tidigare, i synnerhet Envariabelanalys och Flervariabelanalys, men det är alltid bra att fräscha upp minnet.

Givet en funktion  $g: E \rightarrow \mathbf{R}$  då  $E \subset \mathbf{R}$  skriver man derivatan av  $g$  i punkten  $t \in E$  som

$$g'(t) = \dot{g}(t) = \frac{dg}{dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

För en funktion  $f$  av flervariabler, till exempel  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  då  $D \subset \mathbf{R}^3$  har vi tre möjliga (första ordningens) derivator och ett menageri av notationer:

$$f'_x(x, y, z) = f_x(x, y, z) = \partial_1 f(x, y, z) = \partial_x f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$f'_y(x, y, z) = f_y(x, y, z) = \partial_2 f(x, y, z) = \partial_y f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h};$$

$$f'_z(x, y, z) = f_z(x, y, z) = \partial_3 f(x, y, z) = \partial_z f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}.$$

---

\*Dessa anteckningar följer *Partial Differential Equations* av W.A Strauss.  
Senast ändrad: 27 april 2015.

Olika författare har olika preferenser och varje notation lämpar sig för olika situationer, därför är det bra att känna till alla.

Högre ordningens derivator noteras på analogt sätt, till exempel  $f_{xx}$ ,  $\partial_x \partial_y f$ ,  $\partial^2 f / \partial y^2$ ,  $f_{xxy}$ , och så vidare.

Vektorn av alla partiella derivator av en funktion  $f$  kallas *gradienten* av  $f$ . Den skrivs

$$\nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$$

För en funktion  $F: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  kan man betrakta divergensen av  $F$ :

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3,$$

då  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Man kan också betrakta rotationen av  $F$ :

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F := (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

## 1.2 Differentialekvationer

En *differentialekvation* är en ekvation som innehåller en okänd funktion  $u$  och derivator av  $u$ . Om  $u$  är en funktion av en variabel kallas ekvationen en *ordinär differentialekvation (ODE)*. Om  $u$  är en funktion av flera variabler kallas ekvationen en *partiell differentialekvation (PDE)*. Ekvationen  $u' = u$  är till exempel en ordinär differentialekvation, men  $u_x + 4u_y = 0$  är en partiell differentialekvation.

En funktion  $u$  som löser en differentialekvation kallas en *lösning* till ekvationen. Till exempel är  $u(x) = e^x$  en lösning till ekvationen  $u' = u$ .

*Ordningen* av en differentialekvation är ordningen av den högsta ordningens derivata som ekvationen innehåller. Alltså har alla andra ordningens differentialekvationer i två variabler formen

$$F(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Till exempel, om  $F(x_0, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}) = x_{11} + x_{22}$ , då differentialekvationen är  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

En differentiell operator är ett begrepp som kommer att bli användbart. En *operator* är en funktion som skickar en funktion till en annan funktion. En *differentialoperator* är en operator som deriverar den funktion operatören agerar på. Till exempel, för ett givet  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\nabla$  är det en differentialoperator som skickar  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  till funktionen  $\nabla f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  enligt formeln  $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f(\mathbf{x}), \partial_2 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}))$ . Ganska ofta är det praktiskt att använda notationen ovanför för att beteckna differentialoperatorn, till exempel operatören  $u \mapsto u_t - u_{xx} = (\partial_t - \partial_x^2)u$  kan skrivas som  $(\partial_t - \partial_x^2)$ .

En operator  $\mathcal{L}$  kallas *linjär* om  $\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}(u) + \beta \mathcal{L}(v)$  för alla  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  och alla funktioner  $u$  och  $v$ . Det är enkelt att kolla att följande operatorer är linjära.

1. Gradienten  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$  agerar på funktioner  $u: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ .
2. Divergens agerar på funktioner  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  enligt formeln

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^n \partial_j u^j.$$

3. Rotationen  $\operatorname{curl} = \operatorname{rot}$  agerar på funktioner  $u = (u^1, u^2, u^3): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  enligt formeln

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{curl} u = (\partial_2 u^3 - \partial_3 u^2, \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3, \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1).$$

4. Laplaceoperatören  $\Delta := \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$  agerar på  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ .

Ett exempel på en operator som inte är linjär är  $u \mapsto u_y + u_{xxy} + uu_x$ . (Varför?)

*Ordningen* av en operator  $\mathcal{L}$  är ordningen av differentialekvationen  $\mathcal{L}(u) = 0$  som en ekvation i  $u$ . En differentialekvation kallas en *linjär homogen* ekvation, om den tar formen  $\mathcal{L}(u) = 0$ , då  $\mathcal{L}$  är en linjär differentialoperator. Den kallas *linjär inhomogen* ekvation om den tar formen  $\mathcal{L}(u) = f$  för någon funktion  $f$ , då  $\mathcal{L}$  åter är en linjär differentialoperator.

## 2 Linjära första ordningens ekvationer och metoden med karakteristiska kurvor

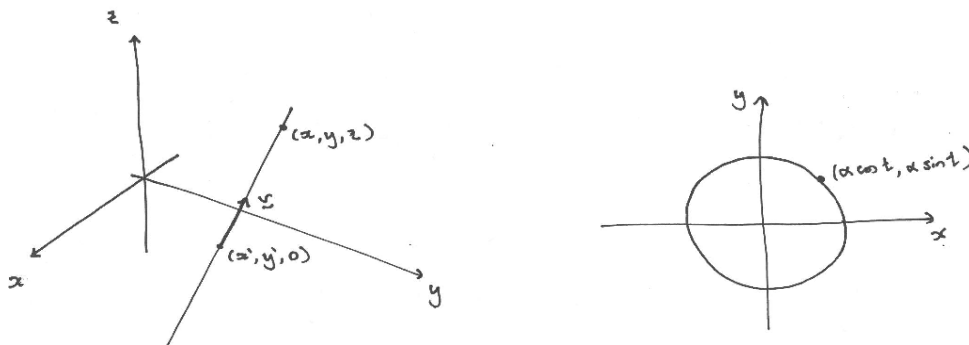
Vi börjar med att lösa en ganska enkel ekvation: Hitta alla funktioner  $u: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  så att

$$au_x + bu_y + cu_z = 0 \quad \text{i } \mathbf{R}^3, \quad (2.1)$$

där  $a$ ,  $b$  och  $c$  är tre reella tal som inte alla är noll. Trots att ekvationen ser enkel ut, är metoden vi ska använda för att lösa den ganska kraftfull. Observera att ekvationen kan skrivas om som

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$$

där  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ . Alltså säger ekvationen att riktningsderivatan i riktningen  $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  är noll. Därmed är en eventuell lösning  $u$  konstant längs linjer parallella med  $\mathbf{v}$ .



(a) Ett exempel på en linje längs vilken en lösning  $u$  till (2.1) är konstant. (b) En karakteristisk kurva längs vilken en lösning  $u$  till (2.2) är konstant

Figur 1: Karakteristiska kurvor

Eftersom vi antar att åtminstone ett tal  $a$ ,  $b$  eller  $c$  är skilt från noll, analysera vi för tydlighetens skull fallet  $c \neq 0$ . Då har vektorn  $\mathbf{v}$  en komponent som pekar ut ur  $xy$ -planet och varje punkt  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  ligger på en unik linje parallell med  $\mathbf{v}$  som möter  $xy$ -planet i en punkt som kan kallas  $(x', y', 0)$  (se Figur 1(a)). Eftersom vi vet att en lösning  $u$  vore konstant på linjer parallella med  $\mathbf{v}$ , vet vi att  $u(x, y, z) = u(x', y', 0)$ . Dessutom är skillnaden mellan  $(x, y, z)$  och  $(x', y', 0)$  en multipel  $\alpha \in \mathbf{R}$  av  $\mathbf{v}$ . Det vill säga,

$$(x, y, z) - (x', y', 0) = \alpha(a, b, c).$$

Eftersom  $c \neq 0$  har vi att  $\alpha = z/c$ , så  $x' = x - za/c$  och  $y' = y - zb/c$ . Således,

$$u(x, y, z) = u(x - za/c, y - zb/c, 0).$$

Observera avslutningsvis att vi godtyckligt får välja lösningens värde på  $xy$ -planet, alltså tar lösningen till (2.1) generellt formen

$$u(x, y, z) = f(x - za/c, y - zb/c).$$

En sådan funktion  $u$  ska lösa ekvationen (2.1) förutsatt att  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  har båda första ordningens partiella derivator.

Fallen  $a \neq 0$  och  $b \neq 0$  kan hanteras på liknande sätt.

### 2.1 Metoden med karakteristiska kurvor

Nyckeln till att lösa (2.1) var att identifiera linjer längs vilka lösningarna är konstanta. Vi tar den iden och tillämpar i ett mer abstrakt sammanhang för att lösa en liknande ekvation, den här gången med två variabler. Betrakta ekvationen

$$xu_y(x, y) - yu_x(x, y) = 0 \quad \text{för } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (2.2)$$

Den är återigen en förstaordningens ekvation, men den här gången med koefficienter som beror på  $x$  och  $y$ . Vi letar efter kurvor i  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  längst vilka lösningen är konstant. Anta att linjerna parametriseras av variabeln  $t$  och  $x$ -koordinaten ges av funktionen  $t \mapsto X(t)$  och  $x$ -koordinaten ges av funktionen  $t \mapsto Y(t)$ . Alltså vet vi att

$$t \mapsto u(X(t), Y(t)) \text{ är en konstant funktion}$$

Om vi därför använder oss av kedjeregeln kommer vi fram till att

$$0 = \frac{d}{dt}u(X(t), Y(t)) = X'(t)u_x(X(t), Y(t)) + Y'(t)u_y(X(t), Y(t)).$$

Om man jämför denna med (2.2) ser vi att det är en bra ide att välja

$$\begin{aligned} X'(t) &= -Y(t), & \text{och} \\ Y'(t) &= X(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Systemet har lösningen  $X(t) = \alpha \cos(t)$  and  $Y(t) = \alpha \sin(t)$  for any  $\alpha \in \mathbf{R}$  (se Figur 1(b)). Därför är en godtycklig lösning till (2.2) konstant på alla cirklar som har medelpunkter i origo och kan alltså skrivas på formen

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2).$$

En sådan funktion löser (2.2) förutsatt att  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  är deriverbar. Kurvorna

$$\{(x, y) | x = X(t), y = Y(t) \text{ för något } t \in \mathbf{R}\}$$

kallas för *karaktäristiska kurvor* av (2.2).

Metoden vi utnyttjade här var att leta efter kurvor (som kallas karakteristiska kurvor) på vilka lösningen till PDE:n beter sig på en enkelt sätt. I förgående exempel var lösningarna konstant på karakteristiska kurvor, men i princip behövde de bara bete sig på något enkelt sätt som vi kunde räkna ut. Problemet att lösa PDE:n transformeras då till problemet att lösa ett ODE system, nämligen de karakteristiska kurvornas system — (2.3) i exemplet.

### 3 Det fysiska ursprunget till några PDE

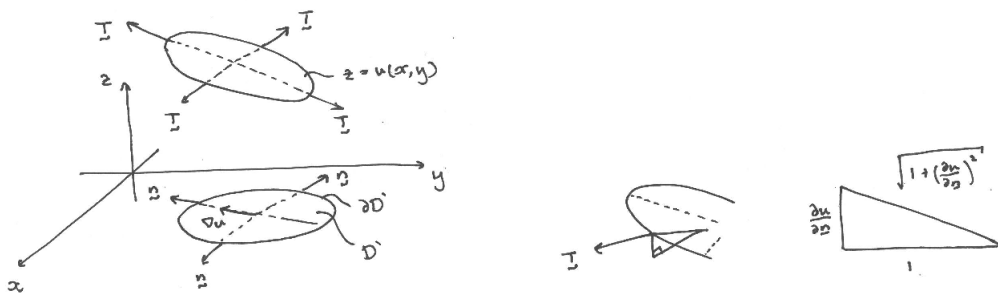
I det här textavsnittet ges fysiska exempel på de ekvationer vi ska studera. Vi bekymrar oss inte nämnvärt om de matematiska detaljerna här utan försöker hellre förklara varför ekvationerna är intressanta genom sitt fysiska sammanhang. Vi ska fortsätta med den rigorösa matematiska analysen i nästa textavsnitt. Där ska vi ta ekvationerna som givna och fundera på matematiska problem.

#### 3.1 Vibrationer och vågekvationen

Betrakta ett vibrerande trumskinn. Anta att en elastisk hinna sträcks över en ram  $\partial D$  som ligger i  $xy$ -planet. För varje  $\mathbf{x}$  som ligger inom ramen (en region  $D$ , då  $\mathbf{x} \in D$ ) och för varje tid  $t$  betecknar vi förskjutningen av hinnan som  $u(\mathbf{x}, t)$ . Vi vill hitta en enkel ekvation som beskriver hur hinnan beter sig när förskjutningarna är små. Funktionen som representerar förskjutningen och löser ekvationen betecknas då med  $u$ .

Anta att hinnan har densiteten  $\rho$  och spänningen har konstant storheten  $T$ . Newtons andra lag säger att massan gånger accelerationen av en liten bit av hinnan  $D'$  är lika med vektorsumman av krafterna som agerar på  $D'$ . Vi antar att hinnan bara rör sig lodrätt så vi är intresserade av summan av de lodräta komponenterna av krafterna på hinnan. Spänningen är parallell till hinnans yta då lodräta komponenter i punkten  $\mathbf{x} \in \partial D'$  är proportionella till

$$\frac{(\partial u / \partial \mathbf{n})}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial \mathbf{n})^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{om } (\partial u / \partial \mathbf{n}) \text{ är litet,}$$



(a) Spänningen  $\mathbf{T}$  agerar längst kanten av en bit hinna och är parallell till både tangentplanet till ytan  $z = u(x, y)$  och planet som innehåller normalvektorn  $\mathbf{n}$  till  $\partial D'$  och  $z$ -axeln. Vi antar  $|\mathbf{T}| = T$  är konstant.

(b) För att räkna spänningens lodräta komponent i en punkt på kanten, betraktar vi slutningen av  $z = u(x, y)$  i normalens riktningen  $\mathbf{n}$ . Den är lika med  $\frac{T(\partial u/\partial \mathbf{n})}{\sqrt{1+(\partial u/\partial \mathbf{n})^2}}$  som är ungefär  $T\partial u/\partial \mathbf{n}$  då  $\partial u/\partial \mathbf{n}$  är litet.

Figur 2: Spänning som agerar på en liten bit elastisk hinna.

när  $\partial u/\partial \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ . Proportionalitetskonstant är spänningen  $T$  så den totala lodräta kraften är 'summan' av  $T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  runt kanten  $\partial D'$ :

$$\int_{\partial D'} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}).$$

(Se Figur 2.) Newtons andra lag säger att integralen är lika med  $D'$ 's massa gånger  $D'$ 's acceleration. Därmed

$$\int_{\partial D'} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \iint_{D'} \rho u_{tt}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Divergenssatsen säger

$$\int_{\partial D'} T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \iint_{D'} \operatorname{div}(T \nabla u(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

och så,

$$\iint_{D'} \operatorname{div}(T \nabla u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \iint_{D'} \rho u_{tt}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Eftersom  $D'$  var godtycklig ser man att  $u$  löser

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) = c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D \text{ och } t \in \mathbb{R}, \text{ när } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (3.1)$$

Ekvationen för  $u$  i (3.1) kallas för *vågekvationen*.

### 3.2 Diffusion och värmeledningsekvationen

Betrakta två vätskor som tillsammans fyller en behållare. Vi är intresserad av hur de två vätskorna blandar. Ficks lag säger att

en vätskas flöde är proportionellt till gradienten av vätskans koncentration.

Beteckna en vätskas koncentration i en punkt  $\mathbf{x}$  och tid  $t$  som  $u(\mathbf{x}, t)$ . För ett godtyckligt område  $D'$  massan av vätskan i  $D'$  är

$$m(t) = \iiint_{D'} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \text{alltså} \quad \frac{dm}{dt}(t) = \iiint_{D'} u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Derivatan av vätskans massa i området  $D'$  är också lika med massans flöde in i området  $D'$ . Enligt Ficks lag har vi då

$$\frac{dm}{dt}(t) = \iint_{\partial D'} k \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) d\sigma(\mathbf{x}).$$

Alltså, om vi använder oss av Divergenssatsen får vi att

$$\iiint_{D'} \operatorname{div}(k\nabla u)(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \iint_{\partial D'} k\mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) d\sigma(\mathbf{x}) = \frac{dm}{dt}(t) = \iiint_{D'} u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Igen eftersom  $D'$  var godtyckligt ser man att  $u$  löser ekvationen

$$u_t(\mathbf{x}, t) = k\Delta u(\mathbf{x}, t) \quad \text{for all } \mathbf{x} \text{ and } t. \quad (3.2)$$

Ekvationen (3.2) kallas för *värmeledningsekvationen*.

### 3.3 Harmoniska funktioner

Funktioner som är lösningar till antingen värmelednings- eller vågekvationen (det vill säga, (3.2) eller (3.1)) och oberoende av tiden är lösningar till *Laplaces ekvation*:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3)$$

Funktioner  $u$  som är lösningar till (3.3) kallas *harmoniska funktioner*. Om  $n = 1$  är det endast linjära funktioner  $u(x) = kx + c$  som är sådana, men om  $n > 1$  är situationen intressantare.

## 4 Randvillkor och välställdhet

Vi har deriverat några olika PDE:s som modellerar skilda fysikaliska situationer, men vi har också sett att det kan finnas många olika lösningar till en enda PDE. För att en PDE verkligen ska vara användbar förväntas att den har en unik lösning, det vill säga att den fysiska egenskapen som lösningen representerar bara har ett entydigt värde. Därmed måste man lägga till ytterligare villkor på modellen för att välja den lösning som är fysikaliskt relevant i en givet situation. Villkorens precisa form beror på ekvationen, men man brukar kunna bruka motivera dem fysikaliskt.

### 4.1 Funktionsrum

Funktionsrummet där vi letar efter en lösning är ett subtilt men viktigt spørsmål. Till exempel, i kvantmekanik kan en lösning  $u: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  till en PDE anknytas till en partikels täthetsfunktion. Sannolikheten att en partikel ligger i ett område  $D \subset \mathbf{R}^3$  i tid  $t$  är givet av uttrycket

$$\int_D |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}.$$

Eftersom det är en sannolikhet skulle man förvänta sig att  $\int_{\mathbf{R}^3} |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1$ , och så en fysikalisk rimlig lösning  $u$  borde innebära att  $\int_{\mathbf{R}^3} |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 1$  för alla  $t$ .

### 4.2 Begynnelsevillkor

En *begynnelsevärde* eller ett *begynnelsevillkor* specificerar hur lösningen ska ser ut i en speciell punkt i tiden. Vi brukar använda bokstäver  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  för att ange spatial koordinat och  $t$  att beteckna tiden. Därmed kan ett beginnelsevärde ta formen  $u(\mathbf{x}, t_0) = f(\mathbf{x})$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  (och en given  $f$ ). Vi skulle då leta efter en funktion  $u$  som löser en given PDE för  $t > 0$ . Betrakta ett värmeledningsflöde (eller en kemikalies diffusion). När man specificerar temperaturen (eller koncentrationen) till  $t = t_0$  är det detsamma som att specificerar lösningen  $u(\cdot, t_0)$  till tiden  $t_0$ . Ur fysisk synpunkt borde det räcka för att hitta en unik lösning  $u(\cdot, t)$  for  $t > t_0$ . Alltså förväntar man sig att kunna hitta en unik funktion  $u: \mathbf{R}^3 \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , för en given funktion  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , som är sådan att

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x}, t) - k\Delta u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{för } (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^3 \times (t_0, \infty), \text{ och} \\ u(\mathbf{x}, t_0) = f(\mathbf{x}) & \text{för } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Observera att här är det viktigt vilket rum vi skulle anta  $u$  ligger i. Till exempel, om vi antar att  $u$  är inte kontinuerlig i  $t = t_0$ , begynnelsevärde begränsar inte antalet lösningar. Ibland är det nyttigt att omformulera begynnelsevillkoret så att en egenskap som kontinuitet ingår i villkoret. Till exempel,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Ibland är det rimligt att ge två begynnelsevärden, som i fallet med vågekvationen. För två givna funktioner  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  och  $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , förväntar man sig att hitta en unik  $u: \mathbf{R}^3 \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  sådan att

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_{tt}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{för } (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^3 \times (t_0, \infty), \text{ och} \\ u(\mathbf{x}, t_0) = f(\mathbf{x}) \text{ och } \partial_t u(\mathbf{x}, t_0) = g(\mathbf{x}) & \text{för } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3. \end{cases}$$