TATA79/TEN2 **Dugga 2, 2019-01-14**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Skriv kontrapositionen av påståendet

"Om n är ett primtal och jämnt då är $n = 2$."

(b) Skriv $7 = 7_{10}$ i det ternära talsystemet.

Solution:

(a)

"Om $n \neq 2$ då är n udda eller inte ett primtal."

(b) $7_{10} = \mathbf{1} \times 3^0 + \mathbf{2} \times 3^1 = 21_3$.

---

2. Kom ihåg Pascals identitet: För positiva hela tal n och k så att $k \leq n-1$ har man att

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Betrakta ett godtyckligt positivt heltal n och $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ge ett induktionsbevis (där man använder induktion över k) av likheten

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

Solution:

För ett godtyckligt positivt heltal n vill vi bevisa

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^k \binom{n-1}{k} \qquad (\dagger)_k$$

för varje heltal $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

För basfallet $k = 0$ har vi att

$$\sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^0 \binom{n}{0} = 1$$

och

$$(-1)^k \binom{n-1}{k} = (-1)^0 \binom{n-1}{0} = 1$$

så $(\dagger)_0$ stämmer.

Nu vill vi visa att $(\dagger)_{k-1} \implies (\dagger)_k$ för $k = 1, 2, \ldots, n-2$: Vi räkna med hjälp av Pascals identitet och $(\dagger)_{k-1}$ att

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} + (-1)^k \binom{n}{k} \\
&\underset{(\dagger)_{k-1}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} \right) \\
&\underset{\text{Pascals identitet}}{\underset{\uparrow}{=}} (-1)^k \binom{n-1}{k},
\end{aligned}$$

så $(\dagger)_{k-1} \implies (\dagger)_k$ för $k = 1, 2, \ldots, n-2$.

Enligt induktionsprincipen är $(\dagger)_k$ bevisat för positiva heltal n och $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

3.

Räknar ut resten av

$$p(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^{57} = \sum_{k=0}^{57} x^k$$

delat med $q(x) := x(x+1)$.

Solution:

Vi vet att vi kan skriva

$$p(x) = q(x)k(x) + r(x) \tag{1}$$

för polynom k och r där r är antingen trivialt eller $\deg(r) < 2$. Därför kan r skrivas som $r(x) = ax + b$ för $a, b \in \mathbf{R}$. Vi sätter $x = 0$ och $x = -1$ i (1) och får

$$\begin{cases} 1 = p(0) = q(0)k(0) + r(0) = b \quad \text{och} \\ 0 = p(-1) = q(-1)k(-1) + r(-1) = -a + b. \end{cases}$$

Så $a = b = 1$ och $r(x) = x + 1$.

Alternativt kan man räkna direkt att

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{k=0}^{57} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{28} x^{2k} + \sum_{k=0}^{28} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{28} x^{2k}(1+x) \\
&= \sum_{k=1}^{28} x^{2k}(1+x) + (1+x) \\
\\
&= x(1+x)\sum_{k=1}^{28} x^{2k-1} + (1+x) \\
&= q(x)\sum_{k=1}^{28} x^{2k-1}(1+x) + (1+x)
\end{aligned}$$

så kvotet är $k(x) := \sum_{k=1}^{28} x^{2k-1}(1+x)$ och resten är $r(x) := 1+x$ (ty $\deg(r) < 2$).

---

4. Betrakta en funktion $f\colon (3,\infty) \to (0,\infty)$ definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}}$$

för alla $x \in (3,\infty)$. Utred med bevis om f är inverterbar eller inte och i fallet den är inverterbar ge inversen.

Solution:

För $y > 0$ räknar vi att

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}} \implies y^2 = \frac{2}{x-3} \implies x - 3 = \frac{2}{y^2} \implies x = 3 + \frac{2}{y^2}.$$

För alla $y > 0$ är $2/y^2 > 0$ och därför $3 + \frac{2}{y^2} > 3$, så för varje $y \in (0,\infty)$ finns det högst ett $x \in (3,\infty)$ som löser ekvationen $y = f(x)$. Därför är f injektiv.

För $y > 0$ kan vi också räkna att

$$x = 3 + \frac{2}{y^2} \implies x - 3 = \frac{2}{y^2} \implies y^2 = \frac{2}{x-3} \underset{\substack{\uparrow \\ y>0}}{\implies} y = \sqrt{\frac{2}{x-3}} = f(x).$$

Därifrån ser vi att $y = f(x)$ har för varje $y \in (0,\infty)$ minst en lösning $x \in (3,\infty)$, så f är surjektiv.

Eftersom f är surjektiv och injektiv är den inverterbar. Från räkningen ovan är inversen tydligen

$$f^{-1}(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

för alla $x \in (0,\infty)$.

---

5. Visa att

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Du får använda andra trigonometriska likheter vi har sett under kursens gång utan bevis så länge du anger de tydligt i din lösning.

Solution:

Vi använder oss av:-

$$\begin{aligned}
\text{Additionsformeln för sinus:} \quad & \sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta; \\
\text{Dubbel vinkel formeln för sinus:} \quad & \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta; \\
\text{Dubbel vinkel formeln för cosinus:} \quad & \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta; \\
\text{Trigonometriska ettan:} \quad & \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.
\end{aligned}$$

Vi räknar

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \sin(2\theta+\theta) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Additionsformeln för sinus}}}{=} \sin(2\theta)\cos\theta + \cos(2\theta)\sin\theta \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dubbla vinklar formler}}}{=} (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + \big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)\sin\theta \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trigonometriska ettan}}}{=} 2\sin\theta\cos^2\theta + \big(1 - 2\sin^2\theta\big)\sin\theta \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trigonometriska ettan}}}{=} 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \big(1 - 2\sin^2\theta\big)\sin\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.
\end{aligned}$$

6.

Betrakta funktionerna $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formler

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x).$$

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned}
2\sinh(x)\cosh(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} \\
&= \frac{e^{2x} + 1 - 1 - e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x).
\end{aligned}$$

7.

(a) För ett komplext tal z definiera *absolutbeloppet* $|z|$ och *konjugatet* $\overline{z}$.

(b) Lös ekvationen $z + 3\overline{z} = 8 + 10i$.

Solution:

(a) För ett komplext tal $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$ är *absolutbellopet* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och *konjugatet* $\overline{z} = x - iy$.

(b) För $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbf{R}$ kan vi skriva om ekvationen till $x + iy + 3(x - iy) = 8 + 10i$ som är ekvivalent med $4x - 2iy = 8 + 10i$. Eftersom imaginär- och realdelen av båda led måste vara lika får vi att $4x = 8$, så $x = 2$, och $-2y = 10$, så $y = -5$. Därför är $z = 2 - 5i$.
