Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Betrakta påståendet

$$\text{"Heltalet } n \text{ är jämnt delbart med 3".} \qquad (\clubsuit)$$

(a) Vilka av de följande påstående är negationen av ($\clubsuit$)? Du måste inte motivera ditt svar.

(i) "Vi vet inte om heltalet n är jämnt delbart med 3 eller inte."

(ii) "Heltalet n är lika med $3k+1$ för något heltal k."

(iii) "Heltalet n är antingen lika med $3k+1$ eller lika med $3k+2$ för något heltal k."

(iv) "Heltalet n är jämnt delbart med 3^k för något heltal k."

(b) Bevisa att

$$\text{"}n \text{ är inte jämnt delbart med 3"} \implies \text{"}n^2 \text{ är inte jämnt delbart med 3".}$$

(2) (a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

för reella $r \neq 1$ och positiva heltal n.

(b) Förenkla summan

$$\sum_{k=1}^{53} 4(3)^k(-2)^{k+1}$$

så att den består av högst två termer. Du måste inte räkna ut eventuella potenser i de två termerna.

(3) (a) Ge definitionen att en icketom mängd A är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n=4}^{\infty}$ är uppåt begränsad där

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

för alla heltal $n \geq 4$.

(4) (a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppen *avtagande* och *strängt avtagande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta två funktioner $f\colon I \to \mathbf{R}$ och $g\colon I \to \mathbf{R}$. Visa att om f är avtagande och g är strängt avtagande, då är $f + g$ strängt avtagande.

(5) (a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Bevisa att den minsta övre begränsning till följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är 1 där

$$b_n = \frac{5n}{n^2 + 6}$$

för varje positivt heltal n.