Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Ge negationen av påståendet:

$$\text{"För alla heltal } n \text{ är } n^2 - 7n + 12 \geq 0." \qquad (\spadesuit)$$

(b) Bevisa att påståendet ($\spadesuit$) är sant.

(c) Bevisa att påståendet

$$\text{"För alla reella tal } x \text{ är } x^2 - 7x + 12 \geq 0\text{"}$$

är falskt.

(2) (a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

för $a, r \in \mathbf{R}$ och $r \neq 1$.

(b) Förenkla summan

$$\sum_{k=1}^{46} 4(3)^k(-1)^{k-1}$$

så att den består av högst två termer. Du måste inte räkna ut eventuella potenser i de två termerna.

(3) (a) Ge definitionen att en icketom mängd A är uppåt begränsad.

(b) Bevisa att följden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är uppåt begränsad där a_n definieras enligt uttrycket

$$a_n = \frac{n+2}{(n+4)(n+8)} \quad \text{för alla } n \in \mathbf{N}.$$

(4) (a) Låt I vara ett intervall. Definiera begreppet *strängt växande* som gäller för en funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$.

(b) Betrakta en funktion $f\colon [6,\infty) \to \mathbf{R}$ som definieras enligt formeln

$$f(x) = \frac{x^3 - 13x^2 + 57x - 81}{x-3}$$

för alla $x \in [6, \infty)$. Visa att f är strängt växande. [Tips: Förenkla bråket.]

(5) (a) Definiera vad det betyder att säga $u \in \mathbf{R}$ är en minsta övre begränsning till en icketom mängd A.

(b) Betrakta mängden $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x < 5\}$. Bevisa att $\sup A = 5$.