Instruktioner: Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Eftersom tentamen är en hemtenta förväntas varje tentand kunde redovisa sina kunskaper på ett djupare sätt än krävs i en tentasal. Däremot är tillgång till kursmaterial, material på internetet och dylika tillåten. Observera att samarbete med andra personer inte är tillåtet! Svara på alla uppgifter. Skriv dina svar på vanligt papper eller på en surfplatta. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Då du är klar med tentan sparar du dina svar elektroniskt antingen genom att fotografera varje sida, scannar sidorna, eller genom att spara direkt på plattan. Sen skickar du dina svar i ett mejl till adressen mai-tenta@mai.liu.se. Du måste ha skickat in tentan senast en halvtimme efter tentatidens slut, det vill säga en halvtimme efter kl. 13. Har du förlängd skrivtid så gäller det att du skickar in tentan senast en halvtimme efter den förlängda skrivtidens slut. Lycka till!

(1) Låt $a, b \in \mathbf{R}$ och $\alpha > 1$ vara konstanter.

(a) Visa att ett $z \in \mathbf{C}$ lyder

$$|z - a - ib| = \alpha|z|$$

om och endast om

$$\left(x + \frac{a}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha^2 - 1}\right)^2 = \frac{\alpha^2\,(a^2 + b^2)}{(\alpha^2 - 1)^2}$$

där $z = x + iy$ för $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) Beskriv geometriskt mängden av alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $|z - a - ib| = \alpha|z|$.

(2) Bevisa att

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (⌂)$$

för varje positivt heltal n.

(3) Betrakta mängden

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y < x^3 \text{ och } 0 \le x < h\}.$$

(a) Skissa mängden P.

(b) Bevisa genom lämpliga uppskattningar med enkla mängder att arean $|P|$ av P är $h^4/4$. Formeln (⌂) kan vara till nytta. Om du behöver räkna ut en supremum eller infimum, räcker det med en kort förklaring och inget bevis av just detta steg krävs.

(4) Ge ett fullständigt bevis av likheten

$$\exp(x)\exp(-x) = 1.$$

Använd gärna beviset av sats F.4 som finns i föreläsningsanteckningar som stöd. Det duger inte att rakt av kopiera det utan du måste skriva det med dina egna ord för att visa att du förstår det du gör.

(5) Vi har räknat i dugga 2 (2020-01-14) att

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Med hjälp av det räkna ut exakta värden av $\cos(\pi/16)$ och $\sin(\pi/16)$.

(6) Definiera en följd rekursivt $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ genom reglerna

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Visa att $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ är växande och uppåtbegränsad. (Tips: Jämför med uppgift 5.)

(7) (a) Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2 + y^2 = r^2$. Låt $y > 0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta + \varphi) = 0$ för alla (x, y).